

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

9

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
1936

---

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

---

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ  
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ  
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

*ВЫПУСК ДЕВЯТЫЙ*

ОБЪЕДИНЕННОЕ  
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И НОМОГРАФИИ  
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

Москва, Центр, Б. Комсомольский пер., 6, ОНТИ,  
Главная редакция общетехнической литературы  
и номографии.

---

Сборник рассчитан на широкий круг читателей: сильных школьников, студентов, преподавателей всех видов учебных заведений. Помимо статей сборник содержит указатель математической литературы за 1935 г., задачи и решения задач, помещенных в предыдущих выпусках сборника.

Сборники „Математическое просвещение“ продаются во всех магазинах ОНТИ. В случае отсутствия в местных магазинах, можно получить их наложенным платежом, направив заказ по адресу: Москва, ул. Кирова 6, книжный магазин ОНТИ № 1, „Книга почтой“.

Редакция *Р. Н. Бончковского*. Оформление *В. Ф. Зазульской*.

Корректурa *Л. А. Дединской*. Наблюдал за выпуском *Тимофеев*.

Сдано в производство 7/VII 1936 г. Подписано к печати 1/VIII 1936 г.

Печ. л. 5. У. а. л. 5,6. Тираж 5.000. Формат  $62 \times 94 \frac{1}{16}$ . Печ. знак. в п. л. 46.000.

Ред. общетехн. лит. № 38. Уполном. Главлита № В—46037. Заказ № 1172.

3-я типография Онти им. Бухарина. Ленинград, ул. Моисеенко, 10.

## ДЕЛЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

(Распространение правила Горнера<sup>1)</sup> на многочлены; применение подвижного делителя)

А. Ф. Арефьев (Винница)

Механизация математических действий в чрезвычайной мере облегчает и ускоряет их производство и способствует устранению ошибок в вычислениях. Примером такой механизации может служить деление многочлена на двучлен вида  $x \pm a$  по правилу Горнера (Horner)<sup>2)</sup>.

Так как операция деления многочлена на многочлен несравненно сложнее, чем операция деления многочлена на двучлен, то представляется в высшей степени желательным механизировать ее, распространив правило Горнера и на деление многочлена на многочлен, в частности на многочлен, у которого коэффициент высшего члена делителя не равен единице.

Пусть, например, нужно разделить многочлен

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n$$

на многочлен

$$B_0x^m + B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} + \dots + B_{n-1}x + B_n.$$

Из тождества: делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток (обозначив коэффициенты частного по нисходящим степеням буквы  $x$  через  $K_0, K_1, K_2, \dots, K_{n-m}$ ) имеем ряд следующих равенств:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= B_0K_0, \\ A_1 &= B_0K_1 + B_1K_0, \\ A_2 &= B_0K_2 + B_1K_1 + B_2K_0, \\ A_3 &= B_0K_3 + B_1K_2 + B_2K_1 + B_3K_0, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

---

<sup>1)</sup> Пользуемся случаем отметить, что опубликование этой статьи совпадает с 150-летним юбилеем со дня рождения Вильяма Георга Горнера (1786—1837). (Ред)

<sup>2)</sup> Подробнее о правиле Горнера см. Сушкевич, Высшая алгебра.

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= \frac{A_0}{B_0}, \\ K_1 &= \frac{K_0(-B_1) + A_1}{B_0}, \\ K_2 &= \frac{K_1(-B_1) + K_0(-B_2) + A_2}{B_0}, \\ K_3 &= \frac{K_2(-B_1) + K_1(-B_2) + K_0(-B_3) + A_3}{B_0}, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если  $B_0 = 1$ , то равенства эти упрощаются и принимают вид

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= A_0, \\ K_1 &= K_0(-B_1) + A_1, \\ K_2 &= K_1(-B_1) + K_0(-B_2) + A_2, \\ K_3 &= K_2(-B_1) + K_1(-B_2) + K_0(-B_3) + A_3, \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из рассмотрения этих формул видно удобство применения подвижного делителя. Сущность этого приема заключается в том, что коэффициенты делителя выписываются в обратном порядке и с противоположными знаками на отдельной бумажке (за исключением коэффициента первого члена, который равен  $+1$ ), и порядок членов считается для делимого и частного слева направо, а для делителя — справа налево; подвижной делитель устанавливается сверху и слева так, чтобы его первый коэффициент (написанный последним, если считать их слева) находился в одном вертикальном столбце с первым коэффициентом делимого; результат умножения этих коэффициентов, т. е. в данном случае коэффициент первого члена делимого на  $+1$  (на первый коэффициент делителя), подписываем внизу как коэффициент первого члена частного. Затем подвигаем бумажку с записанными коэффициентами делителя каждый раз на одно деление вправо. Перемножив стоящие в одном столбце коэффициенты частного и делителя, сложив полученные произведения со следующим членом делимого (под которым еще пока отсутствует соответствующий член частного), получаем коэффициенты соответствующих членов частного. Так поступаем до тех пор, пока, наконец, не останется вовсе находящихся в одном и том же столбце коэффициентов делимого и делителя.

Ниже будет дан пример такого деления; здесь же рассмотрим определение коэффициентов последнего окончательного остатка.

Легко заметить, что коэффициент первого наивысшего члена окончательного остатка находится по тому же правилу, какое установлено выше для коэффициентов частного. Далее, так как

с получением окончательного остатка процесс деления завершен, то в образовании коэффициента второго члена окончательного остатка коэффициент первого члена окончательного остатка уже не принимает участия, и коэффициент этого второго члена окончательного остатка будет образован как сумма произведений коэффициента последнего (содержащего  $x$  в нулевой степени) члена частного на третий член делителя, коэффициента предпоследнего члена частного на четвертый член делителя и так далее, плюс (при применении подвижного делителя) коэффициент делимого, стоящий в одном столбце с коэффициентом первого члена делителя (который, как упомянуто, равен единице); при образовании коэффициента третьего члена остатка аналогично отпадут коэффициенты первого и второго членов окончательного остатка, и этот коэффициент третьего члена остатка получится как алгебраическая сумма произведений коэффициента последнего члена частного на четвертый член делителя, предпоследнего на пятый член делителя и так далее, плюс коэффициент делимого, состоящий в одном столбце с коэффициентами частного и подвижного делителя. Если, по завершении всего этого процесса нахождения остатка, окажутся еще члены делимого, находящиеся вправо от того члена, который стоит в одном столбце с коэффициентом первого члена делителя, то эти члены делимого переносятся без всякого изменения в окончательный остаток.

Иллюстрируем изложенное численным примером

$$(5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25) : (x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 7x^2).$$

1-е положение.

$$\begin{array}{l} \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\ \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\ K_0 = 5 \\ \text{частное} \left\{ \begin{array}{c} 5 \\ x^4 \end{array} \right. \end{array}$$

2-е положение.

$$\begin{array}{l} \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\ \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\ \text{частное} \left\{ \begin{array}{cc} +5 & +11 \\ x^4 & x^3 \end{array} \right. \end{array}$$

$$K_1 = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 1 = 11$$

3-е положение.

$$\begin{array}{l}
 \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} \left\{ \begin{array}{ccc} +5 & +11 & +26 \\ x^4 & x^3 & x^2 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$K_2 = 5(-2) + 11 \cdot 3 + 3 \cdot 1 = 26.$$

4-е положение.

$$\begin{array}{l}
 \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} \left\{ \begin{array}{cccc} +5 & +11 & +26 & +89 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$K_3 = 5 \cdot 7 + 11 \cdot (-2) + 26 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 89.$$

5-е положение.

$$\begin{array}{l}
 \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} \left\{ \begin{array}{ccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$K_4 = 11 \cdot 7 + 26 \cdot (-2) + 89 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 = 289.$$

6-е положение.

$$\begin{array}{l}
 \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} \left\{ \begin{array}{ccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 \end{array} \right. \\
 \text{и остаток}
 \end{array}$$

$$R_0 = 26 \cdot 7 + 89 \cdot (-2) + 289 \cdot 3 + 7 \cdot 1 = 878 \text{ (1-й член остатка).}$$

7-е положение.

$$\begin{array}{l}
 \text{делитель} \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} \left\{ \begin{array}{ccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 & +41 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 & x^4 \end{array} \right. \\
 \text{и остаток}
 \end{array}$$

$$R_1 = 89 \cdot 7 + 289 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = 41 \text{ (2-й член остатка),}$$

8-е положение.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{делитель} & & \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} & \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} & \left\{ \begin{array}{cccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 & +41 & +2020 \end{array} \right. \\
 \text{и остаток} & \left\{ \begin{array}{ccccccc} x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 & x^4 & x^3 \end{array} \right.
 \end{array}$$

$$R_2 = 289 \cdot 7 + (-3) \cdot 1 = 2020 \text{ (3-й член остатка).}$$

9-е положение.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{делитель} & & \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} & \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} & \left\{ \begin{array}{cccccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 & +878 & +41 & +2020 \end{array} \right. \\
 \text{и остаток} & \left\{ \begin{array}{cccccccc} x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right. \\
 & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{частное}} & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{остаток}}
 \end{array}$$

Кратко же все деление с применением подвижного делителя запишется так

$$\begin{array}{lcl}
 \text{подвижной делитель на} & & \left\{ \begin{array}{cccc} x^3 & x^4 & x^5 & x^6 \\ \text{отдельной бумажке} & & +7 & -2 & +3 & +1 \end{array} \right. \\
 \text{делимое} & \left\{ \begin{array}{cccccccccccc} x^{10} & x^9 & x^8 & x^7 & x^6 & x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \\ +5 & -4 & +3 & -2 & -3 & +7 & -4 & -3 & +2 & -10 & +25 \end{array} \right. \\
 \text{частное} & \left\{ \begin{array}{cccccc} +5 & +11 & +26 & +89 & +289 \\ x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right. \\
 \text{остаток} & \left\{ \begin{array}{cccccc} +878 & +41 & +2020 & +2 & -10 & +25 \\ x^5 & x^4 & x^3 & x^2 & x & x^0 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Еще пример

$$\begin{aligned}
 & (5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25) : \\
 & \quad : (x^6 - 3x^5 + 2x^4 - 7x^3 + x^2 + 2x - 3).
 \end{aligned}$$

Подвижной делитель  $+3 - 2x - x^2 + 7x^3 - 2x^4 + 3x^5 + x^6$ ,делимое  $5x^{10} - 4x^9 + 3x^8 - 2x^7 - 3x^6 + 7x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 10x + 25$ ,частное  $5x^4 + 11x^3 + 26x^2 + 89x + 284$ ,остаток  $842x^5 + 18x^4 + 1877x^3 - 382x^2 - 31x + 877$ .

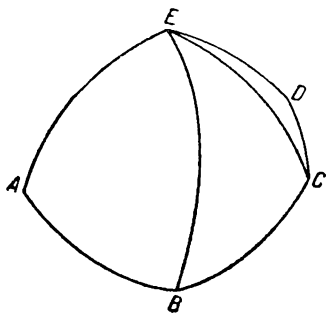
Переходя к более сложному случаю, к делению на многочлен, у которого коэффициент наивысшего члена не равен единице, можем или свести этот случай к предыдущему, разделив все члены делимого и делителя на коэффициент наивысшего члена делителя, или же рассматривать этот случай совершенно самостоятельно на основе формул (2).



## ЗАПОЛНЕНИЕ СФЕРЫ ПРАВИЛЬНЫМИ ФИГУРАМИ

Е. Вегеман (Курск)<sup>1)</sup>

Так как заполнение сферы правильными фигурами имеет не менее важное значение, чем заполнение плоскости правильными фигурами, то я, проработав вопрос о заполнении плоскости правильными многоугольниками<sup>2)</sup>, Математическое просвещение, вып. 3), решил развить эту задачу перенесением ее на сферу.



Фиг. 1.

Заполняя сферу сферическими правильными фигурами, будем соблюдать те же правила, что и на плоскости:

1) Сфера должна быть заполнена сплошь, без просветов и двойных покрытий,

2) Около каждой вершины на сфере должно быть одно и то же расположение фигур.

Прежде чем приступить к основной теме, я докажу одну вспомогательную теорему.

Из сферической тригонометрии известно, что площадь сферического треугольника равна  $\epsilon R^2$ , где  $\epsilon$  — сферический избыток или эксцесс, выраженный в радианах<sup>2)</sup>. Легко показать, что формулу  $\epsilon R^2$  можно распространить и на всякий сферический многоугольник. Действительно, эксцесс сферического многоугольника  $ABCDE\dots$  (фиг. 1) равен сумме эксцессов составляющих его треугольников  $ABE$ ,  $BCE$ ,  $CDE$ ,  $\dots$ , потому что

$$\begin{aligned}\epsilon &= (2d + \epsilon_1) + (2d + \epsilon_2) + \dots + (2d + \epsilon_{n-2}) - 2d(n-2) = \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \dots + \epsilon_{n-2}.\end{aligned}$$

Площадь сферического многоугольника

$$S = \epsilon_1 R^2 + \epsilon_2 R^2 + \dots + \epsilon_{n-2} R^2 = \epsilon R^2.$$

Докажем теперь следующую теорему: если сфера правильно заполнена правильными сферическими фигурами, то  $E = \frac{4\pi}{2\pi - m}$ , где  $E$  число вершин (точки, вокруг которых расположены сферические фигу-

<sup>1)</sup> Автор статьи — ученик 10-го класса Курской опытной школы № 5. Задача о заполнении сферы правильными многоугольниками представляет в сущности лишь легкое видоизменение задачи о полуправильных многогранниках, которой занимался еще Архимед. Нам казалось все же полезным опубликование этой статьи, так как, с одной стороны, знание теории полуправильных многогранников мало распространено, а с другой стороны, статья является показателем достижений советских школьников. (Ред.)

<sup>2)</sup> См., например, Кранц, Сферическая тригонометрия.

ры), а  $m$  — сумма плоских углов при вершине многогранника, образованного заменой сферических фигур плоскими.

В самом деле, сумма углов  $n$  сферических многоугольников, расположенных на шаре, равна  $2\pi E$ .

Сумма всех эксцессов этих фигур равна

$$\frac{S}{R^2} = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi,$$

где  $S$  — площадь всей поверхности шара.

Так как сумма всех плоских углов многогранника равна  $mE$ , то:

$$4\pi = 2\pi E - mE = E(2\pi - m),$$

откуда

$$E = \frac{4\pi}{2\pi - m},$$

или, если перейти к градусному измерению углов;

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - m^\circ}.$$

На основе этой теоремы построим наше исследование.

Здесь уместно сказать, что если сферические углы правильных сферических фигур — величины неопределенные, то плоские углы плоских правильных фигур определены. Прежде всего совершенно ясно, что угол сферической фигуры не превышает  $180^\circ$  и не меньше  $60^\circ$ <sup>1)</sup>. Поэтому около каждой вершины не могут сходиться две или одна фигуры; их должно быть минимум три. Но их не может быть и более пяти. Систематизируем исследование, кладя в основу многоугольник с минимальным количеством углов, участвующим в данном заполнении.

Минимальное  $n$  не может быть равно 6, ибо уже в случае плоских фигур  $120^\circ \cdot 3 = 360^\circ$ , а углы сферического правильного многоугольника всегда больше углов соответствующего плоского многоугольника. Итак,  $n_{\min} = 5$  или меньше.

Могут быть три случая: I.  $n_{\min} = 5$ ; II.  $n_{\min} = 4$ ; III.  $n_{\min} = 3$ .

I.  $n_{\min} = 5$ . Угол сферического пятиугольника больше  $108^\circ$ . Сумма остальных углов при той же вершине будет всегда меньше  $360^\circ - 108^\circ = 252^\circ$ ; меньший угол из остатка меньше  $\frac{252^\circ}{2} = 126^\circ$ ,

стало быть, может принадлежать или пятиугольнику, или шестиугольнику.

Кроме того, около каждой вершины заполнения не может быть более четырех углов, так как уже  $4 \cdot 108^\circ > 360^\circ$ . Следовательно, их три.

<sup>1)</sup> Это ограничение исключает, например, такие многоугольники, все вершины которых лежат на одном большом круге, или такие, площадь которых больше половины площади сферы. (Ред.)

Как видно из чертежа (фиг. 2), при  $n_2 \neq n_3$  невозможно расположить вокруг пятиугольника  $n_2$ -угольники и  $n_3$ -угольники так, чтобы в каждой вершине пятиугольника примыкал один  $n_2$ -угольник и один  $n_3$ -угольник. Поэтому должно быть  $n_2 = n_3$ . Получаем два случая:

$$1) n_1 = 5; n_2 = n_3 = 5.$$

$$2) n_1 = 5; n_2 = n_3 = 6.$$

Рассмотрим эти два случая отдельно.

1)  $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ . По формуле, выведенной выше, имеем:

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 3 \cdot 108^\circ} = \frac{720^\circ}{36^\circ} = 20.$$

Если число граней будет  $F$ , то всех углов они дадут  $5F$ ; сторон должно быть столько же, поэтому в многограннике вершин бу-

дет  $\frac{5F}{3}$ , а ребер  $\frac{5F}{2}$ ;  $E = \frac{5F}{3} = 20$ ;  $F = 12$ ;

$K = \frac{5F}{2} = 30$ . Многогранник есть додекаэдр.

Вообще надо заметить, что, несмотря на специфичность проблемы заполнения сферы сферическими фигурами, мы будем ее связывать с проблемой о многогранниках, ввиду крайней близости этих двух проблем.

2)  $n_1 = 5; n_2 = n_3 = 6$ .

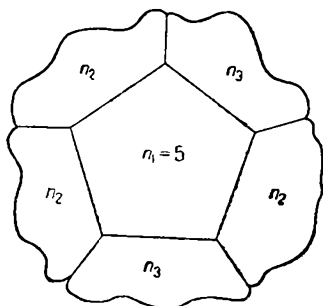
$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - (108^\circ + 2 \cdot 120^\circ)} = 60.$$

Если число пятиугольников равно  $p$ , а шестиугольников —  $q$ , то сторон они дадут столько же, сколько и углов, т. е.  $5p + 6q$ , откуда число вершин  $E = \frac{5p + 6q}{3} = 60$ , число ребер

$$K = \frac{5p + 6q}{2} = 90.$$

По теореме Эйлера  $K + 2 = E + F$ , имеем  $F = K + 2 - E = 32$ . Около каждой вершины сходятся два шестиугольника. Если бы каждая вершина действительно давала начало различным парам шестиугольников, то шестиугольников было бы  $2E = 120$ . Но так как шесть вершин дают только один шестиугольник, то шестиугольников будет в шесть раз меньше, т. е. 20. Итак,  $q = 20$ ;  $p = 32 - 20 = 12$ .

II.  $n_{\min} = 4$ . Углов при вершине опять не может быть больше трех, так как  $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ . Следовательно, углов три. Сумма двух остальных углов при той же вершине меньше  $360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$ ; меньший из них меньше  $\frac{270^\circ}{2} = 135^\circ$ , откуда  $n_2 = 4, 5, 6, 7$  (здесь необходимо добавить, что в дальнейшем, так же как и вначале,



Фиг. 2.

$n_1, n_2, n_3, n_4$  и т. д. мы будем располагать в порядке возрастания:  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \dots$ ). Если  $n_2 = 5$  или 7, то  $n_3 = 4$ , что ясно, если построить фигуру, аналогичную фиг. 2. Так как здесь прогрессивный порядок не соблюден, то значения  $n_2 = 5$  или 7 отпадают. Итак,  $n_2 = 4$  или 6. В последнем случае  $n_3$  не может быть нечетным, что опять-таки следует из рассмотрения фигуры, аналогичной фиг. 2.

Итак, имеем два случая:

$$1) n_1 = n_2 = 4; \quad n_3 = ?$$

$$2) n_1 = 4; \quad n_2 = 6; \quad n_3 = ? \quad (n_3 - \text{четно}).$$

$$1) n_1 = n_2 = 4; \quad n_3 = ?$$

$$E = \frac{720^\circ}{3 \cdot 60^\circ - \left(180^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_3 - 2}{n_3}\right)} = 2n_3,$$

откуда видно, что  $n_3$  произвольно.

Если квадратов  $p$ , а  $n_3$ -угольников  $q$ , то

$$E = \frac{4p + n_3 q}{3} = 2n_3; \quad K = \frac{4p + n_3 q}{2} = 3n_3;$$

$$F = K - E + 2 = n_3 + 2; \quad p = \frac{2 \cdot 2n_3}{4} = n_3; \quad q = 2.$$

$$2) n_1 = 4; \quad n_2 = 6; \quad n_3 = ? \quad (n_3 - \text{четно})$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left(210^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_3 - 2}{n_3}\right)} = \frac{24n_3}{12 - n_3}.$$

Но  $n_3 \geq n_2$ ; поэтому  $n_3 \geq 6$  и при этом четно.  $E$  должно быть целым числом, поэтому  $\frac{24n_3 + 24(12 - n_3)}{12 - n_3} = \frac{288}{12 - n_3}$  тоже должно быть числом целым;  $(12 - n_3)$  является делителем числа 288 и может принимать значения 6, 4 и 2. Итак:

$$1) n_1 = 4; \quad n_2 = n_3 = 6; \quad E = 24; \quad K = 36; \quad F = 14; \quad p = 6; \quad q = 8.$$

$$2) n_1 = 4; \quad n_2 = 6; \quad n_3 = 8; \quad E = 48; \quad K = 72; \quad F = 26; \quad p = 12; \quad q = 8; \quad r = 6.$$

$$3) n_1 = 4; \quad n_2 = 6; \quad n_3 = 10; \quad E = 120; \quad K = 180; \quad F = 62; \quad p = 30; \quad q = 20; \quad r = 12,$$

где  $r$  — число  $n_3$ -угольников.

III.  $n_{\min} = 3$ . Максимум фигур, сходящихся в данном случае около вершины, всегда меньше  $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ , стало быть, он равен 5.

А. Пусть их пять. Полагая опять  $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n_4 \leq n_5$ , видим, что угол  $n_2$ -угольника меньше  $\frac{360^\circ - 60^\circ}{4} = 75^\circ$ . Стало быть,  $n_2 = 3$ . Меньший из остальных трех углов меньше

$$\frac{360^\circ - 120^\circ}{3} = 80^\circ.$$

Стало быть,  $n_3 = 3$ . Меньший угол из последних двух углов меньше  $\frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ$ . Стало быть,  $n_4 = 3$ . Наконец, последний угол меньше  $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ . Стало быть,  $n_5 = 3, 4, 5$ .

$$1) n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = 3.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 300^\circ} = 12; \quad K = 30; \quad F = 20.$$

$$2) n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3; \quad n_5 = 4.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 330^\circ} = 24; \quad K = 30; \quad F = 38; \quad p = 32; \quad q = 6.$$

$$3) n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3; \quad n_5 = 5.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 348^\circ} = 60; \quad K = 150; \quad F = 92; \quad p = 80; \quad q = 12.$$

В. Пусть фигур около каждой вершины четыре:  $n_1 = 3$ ; угол  $n_2$ -угольника меньше  $\frac{360^\circ - 60^\circ}{3} = 100^\circ$ . Стало быть, он принадлежит или треугольнику, или квадрату. Имеем два случая:

$$1) n_1 = n_2 = 3; \quad n_3 = ?; \quad n_4 = ?$$

Остаток из двух углов меньше  $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$ . Меньший угол из остатка меньше  $\frac{240^\circ}{2} = 120^\circ$ . Итак,  $n_3 = 3, 4, 5$ .

$$a) n_1 = n_2 = n_3 = 3; \quad n_4 = ?$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left(180^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_4 - 2}{n_4}\right)} = 2n_4,$$

откуда видно, что  $n_4$  — произвольно.

В этом случае возможно бесконечное множество покрытий.

$$b) n_1 = n_2 = 3; \quad n_3 = 4; \quad n_4 = ?$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left(210^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_4 - 2}{n_4}\right)} = \frac{24n_4}{12 - n_4}.$$

Если  $\frac{24n_4}{12 - n_4}$  целое число, то  $\frac{24n_4 + 24(12 - n_4)}{12 - n_4}$  тоже целое число.

$\frac{288}{12 - n_4}$  может быть целым числом лишь тогда, когда  $12 - n_4$  является делителем числа 288. Кроме того,  $4 \leq n_4 < 12$ . Поэтому возможны следующие случаи  $12 - n_4 = 8, 6, 4, 3, 2, 1$ . Значит,  $n_4 = 4, 6, 8, 9, 10, 11$ . Итак, имеем шесть возможностей:

$$n_1 = n_2 = 3, \quad n_3 = n_4 = 4; \quad E = 12; \quad K = 24; \quad F = 14; \quad p = 8; \\ q = 6.$$

$$n_1 = n_2 = 3, \quad n_3 = 4, \quad n_4 = 6; \quad E = 24; \quad K = 48; \quad F = 26; \quad p = 16; \\ q = 6; \quad r = 4.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 8; E = 48; K = 96; F = 50; p = 32; \\ q = 12; r = 6.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 9; E = 72; K = 144; F = 74; p = 48; \\ q = 18; r = 8.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 10; E = 120; K = 240; F = 122; p = 80; \\ q = 30; r = 12.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 4, n_4 = 11; E = 264; K = 528; F = 266; p = 176; \\ q = 66; r = 24.$$

$$c) n_1 = n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = ?$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left( 228^\circ + 180^\circ \cdot \frac{n_4 - 2}{n_4} \right)} = \frac{30n_4}{15 - 2n_4}.$$

Значит,  $\frac{30n_4 + 15(15 - 2n_4)}{15 - 2n_4} = \frac{225}{15 - 2n_4}$  — целое число. Возможны следующие случаи:  $15 - 2n_4 = 5, 3, 1$ , откуда  $n_4 = 5, 6, 7$ . Получаем три возможности:

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = n_4 = 5; E = 30; K = 60; F = 32; p = 20; \\ q = 12.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 6; E = 60; K = 120; F = 62; p = 40; \\ q = 12; r = 10.$$

$$n_1 = n_2 = 3, n_3 = 5, n_4 = 7; E = 210; K = 420; F = 212; p = 140; \\ q = 42; r = 30.$$

$$2) n_1 = 3, n_2 = 4, n_3 = ?, n_4 = ?$$

Сумма углов  $n_3$ -угольника и  $n_4$ -угольника, принадлежащих к одной вершине, меньше чем  $360^\circ - 150^\circ = 210^\circ$ . Меньший из этих углов меньше  $\frac{210^\circ}{2} = 105^\circ$ . Отсюда  $n_3 = 4$ . Самый большой из всех углов меньше  $360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ .

Отсюда  $n_4 = 4, 5$ .

$$a) n_1 = 3, n_2 = n_3 = n_4 = 4.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 330^\circ} = 24; K = 48; F = 26; p = 8; q = 18.$$

$$b) n_1 = 3, n_2 = n_3 = 4, n_4 = 5.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - 348^\circ} = 60; K = 120; F = 62; p = 20; q = 30; r = 12.$$

С. Пусть около каждой вершины сходятся три фигуры. Тогда по известным соображениям  $n_2 = n_3$ ; если  $n_2 = n_3$  нечетны, то по тем же соображениям  $n_1 = n_2 = n_3 = 3$ . Итак, имеем один случай:

$$1) n_1 = 3, n_2 = n_3 = n.$$

$$E = \frac{720^\circ}{360^\circ - \left( 60^\circ + 360^\circ \cdot \frac{n - 2}{n} \right)} = \frac{12n}{12 - n};$$

$\frac{144}{12-n}$  целое число. За исключением  $n=3$ , имеем одни лишь четные значения  $n$ :

$$12-n=9, 8, 6, 4, 2, \\ n=3, 4, 6, 8, 10.$$

Получаем пять возможностей:

$$n_1=n_2=n_3=3; \quad E=4; \quad K=6; \quad F=4.$$

$$n_1=3, \quad n_2=n_3=4; \quad E=6; \quad K=9; \quad F=5; \quad p=2; \quad q=3.$$

$$n_1=3, \quad n_2=n_3=6; \quad E=12; \quad K=18; \quad F=8; \quad p=4; \quad q=4.$$

$$n_1=3, \quad n_2=n_3=8; \quad E=24; \quad K=36; \quad F=14; \quad p=8; \quad q=6.$$

$$n_1=3, \quad n_2=n_3=10; \quad E=60; \quad K=90; \quad F=32; \quad p=20; \quad q=12.$$

Полученные результаты представлены следующей таблицей:

$N$	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$	$n_5$	$E$	$F$	$K$	$p$	$q$	$r$
1	5	5	5	—	—	20	12	30	—	—	—
2	5	6	6	—	—	60	32	90	12	20	—
3	4	4	$n$	—	—	$2n$	$n+2$	$3n$	$n$	2	—
4	4	6	6	—	—	24	14	36	6	8	—
5	4	6	8	—	—	48	26	72	12	8	6
6	4	6	10	—	—	120	64	180	30	20	12
7	3	3	3	3	3	12	20	30	—	—	—
8	3	3	3	3	4	24	38	60	32	6	—
9	3	3	3	3	5	60	92	150	80	12	—
10	3	3	3	$n$	—	$2n$	$2n+2$	$4n$	$2n$	2	—
11	3	3	4	4	—	12	14	24	8	6	—
12	3	3	4	6	—	24	26	48	16	6	4
13	3	3	4	8	—	48	50	96	32	12	6
14	3	3	4	9	—	72	74	144	48	18	8
15	3	3	4	10	—	120	122	240	80	30	12
16	3	3	4	11	—	264	266	528	176	66	24
17	3	3	5	5	—	30	32	60	20	12	—
18	3	3	5	6	—	60	62	120	40	12	10
19	3	3	5	7	—	210	212	420	140	42	30
20	3	4	4	4	—	24	26	48	8	18	—
21	3	4	4	5	—	60	62	120	20	30	12
22	3	3	3	—	—	4	4	6	—	—	—
23	3	4	4	—	—	6	5	9	2	3	—
24	3	6	6	—	—	12	8	18	4	4	—
25	3	8	8	—	—	24	14	36	8	6	—
26	3	10	10	—	—	60	32	90	20	12	—

Необходимо далее исследовать, какие из этих заполнений в действительности могут быть реализованы <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> В действительности могут быть реализованы лишь заполнения, стоящие в таблице под номерами 1—11, 17, 20—22, 24—26. (Ред.)

## РЕШЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ<sup>1)</sup>:

Г а н ь ш и н (Мичуринск)

Пусть требуется решить систему  $n$  уравнений<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} -x_n + 3x_1 - x_2 &= \sigma_1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= \sigma_2, \\ -x_2 + 3x_3 - x_4 &= \sigma_3, \\ &\vdots \\ -x_{n-2} + 3x_{n-1} - x_n &= \sigma_{n-1}, \\ -x_{n-1} + 3x_n - x_1 &= \sigma_n. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

В целях общности будем полагать, что неизвестные  $x_i$  и свободные члены  $\sigma_i$  являются периодическими функциями целочисленного переменного  $i$  с периодом равным  $l$ , т. е.

$$x_{i+n} = x_i \quad \text{и} \quad \sigma_{i+n} = \sigma_i.$$

В таком случае системе можно придать вид:

$$-x_{i-1} + 3x_i - x_{i+1} = \sigma_i, \quad (i = m+1, m+2, \dots, m+n). \quad (2)$$

Очевидно, произвол в выборе числа  $m$  влияет лишь на порядок записи данных уравнений.

Рассмотрим некоторые свойства чисел ряда Фибоначи:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots, \quad (3)$$

закон образования которых, как известно, состоит в том, что последующий член равен сумме двух предыдущих, причем два первых члена ряда: 0 и 1. Обозначим члены ряда, стоящие на нечетных местах, через  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$ , а члены, стоящие на четных местах, через  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m, \dots$  (см. табл. 1 на стр. 16).

В соответствии с законом образования для чисел  $a_i$  и  $b_i$  имеем:

$$\begin{aligned} a_i &= a_{i-1} + b_i; & b_i &= a_{i-1} + b_{i-1}; \\ -a_{i-1} + 3a_i - a_{i+1} &= 0; & -b_{i-1} + 3b_i - b_{i+1} &= 0; \\ a_{i-1} + 2a_i + a_{i+1} &= 5a_i; & b_{i-1} + 2b_i + b_{i+1} &= 5b_i; \end{aligned}$$

$$\sum_{v=1}^i b_v = a_i; \quad \sum_{v=1}^{i-1} a_v = b_i - 1.$$

<sup>1)</sup> Рассматриваемые в статье уравнения принадлежат к типу неоднородных линейных разностных уравнений, для которых в курсах исчисления конечных разностей даются методы решения. Числа Фибоначи удовлетворяют уравнению  $x_{i+2} = x_{i+1} + x_i$ , являющемуся однородным линейным, и потому они могут

быть представлены в форме  $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ .

Аналогично может быть решено и рассматриваемое в статье уравнение. (Ред.).

2) Необходимость решения подобной системы уравнений встретила меня при изучении одного геодезического вопроса. См. мою статью "Уравнение центральной системы по направлениям", "Геодезист", 1934, № 3-4.



В четвертой строке табл. 1 помещены числа  $c_k$ , составленные следующим образом:  $c_0 = b_1 + b_1$ ;  $c_v = b_v + b_{v+1}$ , где  $v = 1, 2, 3, \dots, m, \dots$ . Из свойств этих чисел отмечу следующие:

$$\begin{aligned} c_0 &= b_1 + b_1; \quad c_v = b_v + b_{v+1}; \\ &-c_{v-1} + 3c_v - c_{v+1} = 0 \\ \sum_{v=1}^i c_v &= a_i + a_{i+1} - 1; \quad \sum_{v=0}^{i-1} c_v = a_{i-1} + a_i + 1; \\ \sum_{v=0}^{i-1} c_v + \sum_{v=1}^i c_v &= 5a_i. \end{aligned}$$

Эти равенства особых доказательств не требуют.

Т а б л и ц а 1

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$a_i$	0	1	3	8	21	55	144	377	987
$b_i$	—	1	2	5	13	34	89	233	610
$c_i$	2	3	7	18	47	123	322	843	2207

После этих предварительных соображений приступим к решению системы уравнений (1), причем отдельно разберем два случая:

1-й случай.  $n = 2m + 1$ .

Покажем, что для этого случая неизвестные  $x_i$  определяются из равенств:

$$x_i = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)} + b_{m+1} \sigma_i + \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i-v+(m+1)} \right] \quad (4)$$

( $i = 1, 2, 3, \dots, 2m, 2m+1$ ), где  $S_{2m+1}$  есть следующая сумма:

$$S_{2m+1} = \sum_{v=1}^m b_v + b_{m+1} + \sum_{v=1}^m b_v.$$

По аналогии для  $x_{i-1}$  и  $x_{i+1}$  мы должны будем написать:

$$\begin{aligned} x_{i-1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)-1} + b_{m+1} \sigma_{i-1} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i-v+(m+1)-1} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)+1} + b_{m+1} \sigma_{i+1} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i-v+(m-1)+1} \right]. \quad (6)$$

После ряда несложных преобразований<sup>1)</sup> равенствам (4) (5) и (6) можно приписать вид:

$$x_{i-1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ b_1 \sigma_{i+m} + \sum_{v=2}^m b_{v+1} \sigma_{i+v-(m+1)} + b_m \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=2}^m b_{v-1} \sigma_{i-v+(m+1)} + b_2 \sigma_{i-m} \right], \\ x_i = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ b_1 \sigma_{i+m} + \sum_{v=2}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)} + b_{m+1} \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=2}^m b_v \sigma_{i-v+(m+1)} + b_1 \sigma_{i-m} \right], \\ x_{i+1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ b_2 \sigma_{i+m} + \sum_{v=2}^m b_{v-1} \sigma_{i+v-(m+1)} + b_m \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=2}^m b_{v+1} \sigma_{i-v+(m+1)} + b_1 \sigma_{i-m} \right].$$

1) Например:

$$x_{i-1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)-1} + b_{m+1} \sigma_{i-1} + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^m b_v \sigma_{i-v+(m+1)-1} \right] = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ b_1 \sigma_{i-(m+1)} + b_2 \sigma_{i-m} + \right. \\ \left. + \sum_{v=3}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)-1} + b_{m+1} \sigma_{i-1} + \sum_{v=1}^{m-1} b_{v+1} \sigma_{i+v-(m-1)} + b_m \sigma_i \right];$$

но

$$\sigma_{i-(m+1)} = \sigma_{i+m}; \quad \sum_{v=3}^m b_v \sigma_{i+v-(m+1)-1} = \sum_{v=2}^{m-1} b_{v+1} \sigma_{i+v-(m-1)},$$

поэтому окончательно:

$$x_{i-1} = \frac{1}{S_{2m+1}} \cdot \left[ b_1 \sigma_{i+m} + \sum_{v=2}^m b_{v+1} \sigma_{i+v-(m+1)} + b_m \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=2}^m b_{v-1} \sigma_{i-v+(m+1)} + b_2 \sigma_{i-m} \right].$$

Составляя выражения  $(-x_{i-1} + 3x_i - x_{i+1})$ , замечаем, что  $-b_2 + 3b_1 - b_0 = 0$ ,  $-b_{v-1} + 3b_v - b_{v+1} = 0$  ( $v = 2, 3, \dots, m$ ),  $-b_m + 3b_{m+1} - b_m = S_{2m+1}$ <sup>1)</sup>, чем и доказывается соблюдение равенств  $-x_{i-1} + 3x_i - x_{i+1} = \sigma_i$  для данного случая.

2-й случай:  $n = 2m$ .

Для четного числа уравнений корни найдутся по формуле

$$x_i = -\frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=0}^{m-1} c_v \sigma_{v+i-m} + c_m \sigma_i + \sum_{v=1}^{m-1} c_v \sigma_{i-v+m} \right], \quad (7)$$

где  $S_{2m}$  — сумма коэффициентов уравнения

$$S_{2m} = \sum_{v=0}^{m-1} c_v + \sum_{v=1}^m c_v.$$

По аналогии для  $x_i$  и  $x_{i+1}$  мы должны будем написать:

$$x_{i-1} = -\frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=0}^{m-1} c_v \sigma_{v+i-m-1} + c_m \sigma_{i-1} + \sum_{v=1}^{m-1} c_v \sigma_{i-v+m-1} \right],$$

$$x_{i+1} = -\frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=0}^{m-1} c_v \sigma_{v+i-m+1} + c_m \sigma_{i+1} + \sum_{v=1}^{m-1} c_v \sigma_{i-v+m+1} \right].$$

Производя с данными уравнениями преобразования, аналогичные преобразования уравнений в первом случае, найдем:

$$x_{i-1} = \frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^{m-1} c_{v+1} \sigma_{i+v-m} + c_{m-1} \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{m-1} c_{v-1} \sigma_{i-v+m} + c_1 \sigma_{i+m} \right],$$

$$x_i = \frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^{m-1} c_v \sigma_{i+v-m} + c_m \sigma_i + \sum_{v=1}^{m-1} c_v \sigma_{i-v+m} + c_0 \sigma_{i+m} \right],$$

$$x_{i+1} = \frac{1}{S_{2m}} \cdot \left[ \sum_{v=1}^{m-1} c_{v-1} \sigma_{i+v-m} + c_{m+1} \sigma_i + \right. \\ \left. + \sum_{v=1}^{m-1} c_{v+1} \sigma_{i-v+m} + c_1 \sigma_{i+m} \right];$$

---

1)  $-b_m + 3b_{m+1} - b_m = -b_m + 3b_{m+1} - b_{m+2} + b_{m+2} - b_m =$   
 $= b_{m+2} - b_m = a_{m+1} + a_m = \sum_{v=1}^{m+1} b_v + \sum_{v=1}^m b_v = S_{2m+1}.$

составляя суммы  $(-x_{i-1} + 3x_i - x_{i+1})$ , замечаем, что  $(-c_1 + 3c_0 - c_1) = 0$  и  $(-c_{v-1} + 3c_v - c_{v+1}) = 0$  ( $v = 1, 2, \dots, m-1$ ); кроме того,  $(-c_{m-1} + 3c_m - c_{m+1}) = c_{m+1} - c_{m-1} = 5a_m = S_{2m}$ , чем и доказывается выполнение равенств (1).

В качестве примера привожу значения корней для  $n = 4$  и  $n = 5$ :

$n = 4.$

$n = 5.$

$$x_1 = \frac{1}{15} (7\sigma_1 + 3\sigma_2 + 2\sigma_3 + 3\sigma_4), \quad x_1 = \frac{1}{11} (5\sigma_1 + 2\sigma_2 + 1\sigma_3 + 1\sigma_4 + 2\sigma_5),$$

$$x_2 = \frac{1}{15} (3\sigma_1 + 7\sigma_2 + 3\sigma_3 + 2\sigma_4), \quad x_2 = \frac{1}{11} (2\sigma_1 + 5\sigma_2 + 2\sigma_3 + 1\sigma_4 + 1\sigma_5),$$

$$x_3 = \frac{1}{15} (2\sigma_1 + 3\sigma_2 + 7\sigma_3 + 3\sigma_4), \quad x_3 = \frac{1}{11} (1\sigma_1 + 2\sigma_2 + 5\sigma_3 + 2\sigma_4 + 1\sigma_5),$$

$$x_4 = \frac{1}{15} (3\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + 7\sigma_4), \quad x_4 = \frac{1}{11} (1\sigma_1 + 1\sigma_2 + 2\sigma_3 + 5\sigma_4 + 2\sigma_5),$$

$$x_5 = \frac{1}{11} (2\sigma_1 + 1\sigma_2 + 1\sigma_3 + 2\sigma_4 + 5\sigma_5).$$


---

## ОЧЕРК АНАЛИТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ф. В. Доброхотов (Куйбышев)

1. Пусть дано какое-либо из дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0. \quad (2)$$

Можно изучить свойства функций, выраженных частными интегралами каждого из этих двух уравнений, и, следовательно, функций  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $e^x$ , опираясь исключительно на то, что каждая из этих функций удовлетворяет: 1) одному из упомянутых дифференциальных уравнений, 2) некоторым начальным условиям, выделяющим ее из общего интеграла этого дифференциального уравнения. Оба эти определяющие функцию обстоятельства могут быть заменены эквивалентной им системой интегральных уравнений.

Ниже мы даем набросок теории тригонометрических и экспоненциальной функций, исходя из приведенных соображений и таким образом отвлекаясь от исторического генезиса этих функций.

2. Заметим, что если  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  суть интегралы какого-либо одного уравнения из (1) или (2), то, как это легко проверить подстановкой, всякая линейная форма

$$y = A\varphi(x) + B\psi(x),$$

где  $A$  и  $B$  неравные одновременно нулю постоянные, есть также интеграл этого уравнения.

3. Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y \quad (1)$$

эквивалентно системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z \\ \frac{dz}{dx} &= -y \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

I. Пусть  $y=1$ ,  $z=0$  при  $x=0$ . Имеем в этом случае систему интегральных уравнений

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x z \, dx, \\ z &= - \int_0^x y \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Применим для решения этой системы метод последовательных приближений. В качестве первого приближения находим:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1, \\ z &= - \int_0^x 1 \cdot dx = -x; \end{aligned} \right\}$$

второе приближение будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x (-x) \, dx = 1 - \frac{x^2}{2}, \\ z &= - \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) dx = -x + \frac{x^3}{2 \cdot 3}; \end{aligned} \right\}$$

третьим приближением окажется:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x \left(-x + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right) dx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \\ z &= - \int_0^x \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}\right) dx = -x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} - \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \end{aligned} \right\}$$

и т. д. В пределе будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \\ z &= \frac{d\varphi}{dx} = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

II. Пусть теперь  $y=0$ ,  $z=1$  при  $x=0$ . В этом случае имеем систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y &= \int_0^x z \, dx, \\ z &= 1 - \int_0^x y \, dx. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Применяя для решения этой системы метод последовательных приближений, находим в качестве первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} y &= \int_0^x 1 \cdot dx = x, \\ z &= 1 - \int_0^x x \, dx = 1 - \frac{x^2}{2}; \end{aligned} \right\}$$

второе приближение будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= \int_0^x \left( 1 - \frac{x^2}{2} \right) dx = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3}, \\ z &= 1 - \int_0^x \left( x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \right) dx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}; \end{aligned} \right\}$$

третьим приближением окажется:

$$\left. \begin{aligned} y &= \int_0^x \left( 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} \right) dx = x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}, \\ z &= 1 - \int_0^x \left( x - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \right) dx = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \end{aligned} \right\}$$

и т. д. В пределе получим:

$$\left. \begin{aligned} y &= \psi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ z &= \frac{d\psi}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. Назовем частный интеграл  $\varphi(x)$  косинусом  $x$  и обозначим его через  $\cos x$ , а частный интеграл  $\psi(x)$  синусом  $x$  и обозначим его через  $\sin x$ . Тогда на основании результатов (5) и (7) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \cos x &= -\sin x, \\ \frac{d}{dx} \sin x &= \cos x. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Заметим также, что на основании тех же результатов:

$$\left. \begin{aligned} \cos(-a) &= \cos a, \\ \sin(-a) &= -\sin a, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

т. е. косинус есть функция четная, а синус функция нечетная.

Выведем теперь теоремы сложения, т. е. докажем, что

$$\begin{aligned} \cos(x+a) &= \cos a \cdot \cos x - \sin a \sin x, \\ \sin(x+a) &= \sin a \cdot \cos x + \cos a \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Как замечено в § 2, функция

$$y = A \cos x + B \sin x$$

будет также интегралом уравнения (1), если  $A$  и  $B$  — какие-либо постоянные. Непосредственной подстановкой в уравнение (1) убеждаемся, что и

$$y = \cos(x + a),$$

где  $a$  — постоянное, будет также интегралом уравнения (1). Чтобы эти две формы выражали один и тот же интеграл, необходимо, чтобы обе формы, равно как и их производные, были тождественно между собой равны, т. е. чтобы

$$\left. \begin{aligned} A \cos x + B \sin x &= \cos(x + a), \\ -A \sin x + B \cos x &= -\sin(x + a); \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

эти равенства должны существовать и при  $x = -a$ ; но в таком случае они дают:

$$\left. \begin{aligned} A \cos(-a) + B \sin(-a) &= \cos 0 = 1, \\ -A \sin(-a) + B \cos(-a) &= -\sin 0 = 0, \end{aligned} \right\}$$

или согласно формулам (9):

$$\left. \begin{aligned} A \cos a - B \sin a &= 1, \\ A \sin a + B \cos a &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему уравнений относительно  $A$  и  $B$ , находим:

$$A = \cos a, \quad B = -\sin a,$$

откуда, внося эти значения в уравнения (10), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x + a) &= \cos a \cdot \cos x - \sin a \sin x, \\ \sin(x + a) &= \sin a \cdot \cos x + \cos a \sin x, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

т. е. то, что требовалось доказать. Заменяя здесь  $a$  на  $-a$  и принимая во внимание формулы (9), находим:

$$\left. \begin{aligned} \cos(x - a) &= \cos a \cos x + \sin a \sin x, \\ \sin(x - a) &= -\sin a \cos x + \cos a \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Полагая теперь в первом из равенств (12)  $x = a$ , находим

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1. \quad (13)$$

5. Выявим еще периодичность функций  $\cos x$  и  $\sin x$ . Результаты (5) дают:

$$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{x^6}{6!} \left(-1 + \frac{x^2}{7 \cdot 8}\right) + \frac{x^{10}}{10!} \left(-1 + \frac{x^2}{11 \cdot 12}\right) + \dots,$$

замечая, что подстановка  $x = 2$  обращает каждую скобку в пра-



вой части равенства в отрицательное количество, заключаем, что

$$\cos 2 < 0,$$

в то время как

$$\cos 0 = 1 > 0;$$

отсюда делаем вывод, что  $\cos x$ , будучи функцией непрерывной, имеет между 0 и 2 корень. Обозначим его через  $\frac{\pi}{2}$ , т. е. будем считать, что

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad 0 < \frac{\pi}{2} < 2. \quad (14)$$

Тогда согласно формуле (13):

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1;$$

но так как результаты (7) дают:

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^4}{4!} \left(1 - \frac{x^2}{5 \cdot 6}\right) + \frac{x^8}{8!} \left(1 - \frac{x^2}{9 \cdot 10}\right) + \dots,$$

а это показывает, что во всем промежутке  $0 < x < 2 \sin x$  положителен (ибо все скобки в правой части сказываются для этого промежутка положительными), то

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1. \quad (15)$$

Полагая теперь в формулах (11)  $a = \frac{\pi}{2}$  и принимая во внимание только что полученные результаты относительно  $\sin \frac{\pi}{2}$  и  $\cos \frac{\pi}{2}$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, \\ \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

полагая в (16)  $x = x' + \frac{\pi}{2}$ , получим:

$$\cos \left(x' + \pi\right) = -\sin \left(x' + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin \left(x' + \pi\right) = \cos \left(x' + \frac{\pi}{2}\right),$$

или, опуская значок при  $x'$  и применяя (16):

$$\left. \begin{aligned} \cos (x + \pi) &= -\cos x, \\ \sin (x + \pi) &= -\sin x; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

полагая в последних равенствах  $x = x' + \pi$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \cos (x' + 2\pi) &= -\cos (x' + \pi); \\ \sin (x' + 2\pi) &= -\sin (x' + \pi). \end{aligned} \right\}$$

или, опуская значок у  $x'$  и применяя (17),

$$\left. \begin{aligned} \cos(x + 2\pi) &= \cos x, \\ \sin(x + 2\pi) &= \sin x. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Таким образом периодом функций  $\cos x$  и  $\sin x$  будет величина, которую, согласно (14), надо будет обозначать через  $2\pi$ ; она лежит в интервале  $0 < 2\pi < 8$ .

6. Чтобы решить дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y = 0, \quad (19)$$

достаточно ввести замену переменного  $x$  на  $\frac{1}{n}\xi$ , т. е. положить

$$nx = \xi$$

и следовательно

$$\frac{d\xi}{dx} = n.$$

В силу такой замены  $y$ , как функция от  $x$ , перейдем в  $Y$ , как функцию от  $\xi$ , т. е. будем иметь:

$$y(x) = Y(\xi).$$

Берем от последнего равенства производную по  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = n \frac{dY}{d\xi};$$

дифференцируем еще раз:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( n \frac{dY}{d\xi} \right) = n \frac{d^2 Y}{d\xi^2} \cdot \frac{d\xi}{dx} = n^2 \frac{d^2 Y}{d\xi^2};$$

если полученные результаты внести в уравнение (19), то после сокращения на  $n^2$  найдем:

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} + Y = 0.$$

Интегралом этого уравнения на основании предыдущего будет:

$$Y = A \cos \xi + B \sin \xi.$$

Выполняя здесь обратную замену  $\xi$  на  $nx$  и замечая, что при этом  $Y(\xi)$  перейдет в  $y(x)$ , получаем общий интеграл уравнения (19) в виде:

$$y = A \cos nx + B \sin nx, \quad (20)$$

где  $A$  и  $B$  — произвольные постоянные.

7. Переходим теперь к изучению уравнения

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y. \quad (21)$$

Как не трудно обнаружить, оно эквивалентно или системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= z, \\ \frac{dz}{dx} &= y, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -z, \\ \frac{dz}{dx} &= -y. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

I. Будем искать для системы (22) то ее решение, которое определится условиями  $y=1$ ,  $z=1$  при  $x=0$ . Имеем в этом случае систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x z \, dx, \\ z &= 1 + \int_0^x y \, dx. \end{aligned} \right\}$$

Применяя для этой системы метод последовательных приближений, находим в качестве первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x 1 \cdot dx = 1 + x, \\ z &= 1 + \int_0^x (1 + x) \, dx = 1 + x + \frac{x^2}{2}; \end{aligned} \right\}$$

второе приближение будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}, \\ z &= 1 + \int_0^x \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right) dx = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \end{aligned} \right\}$$

и т. д. В пределе получаем:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \Phi(x), \\ z &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

II. Будем искать и для системы (23) то ее решение, которое определяется условиями  $y=1$ ,  $z=1$  при  $x=0$ . Будем иметь

в таком случае систему интегральных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - \int_0^x z \, dx, \\ z &= 1 - \int_0^x y \, dx. \end{aligned} \right\}$$

Применяя для решения этой системы метод последовательных приближений, получаем в качестве первого приближения:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - \int_0^x 1 \cdot dx = 1 - x, \\ z &= 1 - \int_0^x (1 - x) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2}; \end{aligned} \right\}$$

второе приближение будет:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - \int_0^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) dx = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3}, \\ z &= 1 - \int_0^x \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3}\right) dx = 1 - x + \frac{x^2}{5} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \end{aligned} \right\}$$

и так далее. В пределе находим:

$$\left. \begin{aligned} y &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \Psi(x), \\ z &= 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

8. Назовем частный интеграл  $\Phi(x)$  экспоненциальной функцией и обозначим его через  $\exp(x)$ ; частный интеграл  $\Psi(x)$  получит тогда обозначение  $\exp(-x)$ . На основании результатов (24) и (25) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \exp(x) &= \exp(x), \\ \frac{d}{dx} \exp(-x) &= -\exp(-x). \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

В то ведем теперь теорему сложения для  $\exp(x)$ , т. е. докажем,

$$\exp(x + a) = \exp(a) \cdot \exp(x).$$

Как замечено в § 2, функция

$$y = A \exp(x) + B \exp(-x),$$

где  $A$  и  $B$  — постоянные, будет также интегралом уравнения (21).

Непосредственной подстановкой в (21) убеждаемся, что и

$$y = \exp(x + a),$$

где  $a$  — постоянное число, будет также интегралом уравнения (21). Чтобы эти две формы выражали один и тот же частный интеграл, необходимо, чтобы обе формы, а также их производные, были тождественно между собой равны, т. е. чтобы

$$\left. \begin{aligned} A \exp(x) + B \exp(-x) &= \exp(x + a), \\ A \frac{d}{dx} \exp(x) + B \frac{d}{dx} \exp(-x) &= \frac{d}{dx} \exp(x + a), \end{aligned} \right\}$$

или согласно (26):

$$\left. \begin{aligned} A \exp(x) + B \exp(-x) &= \exp(x + a), \\ A \exp(x) - B \exp(-x) &= \exp(x + a). \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Эти равенства должны существовать и при  $x = -a$ ; но в таком случае они дают:

$$\begin{aligned} A \exp(-a) + B \exp(a) &= \exp(0) = 1, \\ A \exp(-a) - B \exp(a) &= \exp(0) = 1. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений относительно  $A$  и  $B$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{\exp(-a)}, \\ B &= 0, \end{aligned} \right\}$$

откуда, внося эти значения в уравнения (27), находим:

$$\exp(x) = \exp(x + a) \cdot \exp(-a), \quad (28)$$

или, полагая здесь  $x = 0$ :

$$\exp(0) = \exp(a) \cdot \exp(-a),$$

т. е.

$$\exp(a) \cdot \exp(-a) = 1. \quad (29)$$

Исключая теперь из (28) и (29)  $\exp(-a)$ , находим:

$$\exp(x + a) = \exp(a) \cdot \exp(x), \quad (30)$$

что и требовалось доказать.

Последнее функциональное равенство позволяет нам выявить характер функции  $\exp(x)$ . Обозначим через  $e$  значение  $\exp(x)$  для  $x = 1$ , т. е. положим, что

$$\exp(1) = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,7182818284590\dots$$

Тогда на основании равенства (30) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \exp(2) &= \exp(1) \cdot \exp(1) = e \cdot e = e^2, \\ \exp(3) &= \exp(2) \cdot \exp(1) = e^2 \cdot e = e^3, \\ &\dots\dots\dots \\ \exp(-1) \cdot \exp(1) &= 1; \quad \exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}, \\ &\dots\dots\dots \\ \exp\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\right) &= \exp(1) = e; \quad \exp\left(\frac{1}{2}\right) = V e, \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

так что  $\exp(x)$  мы можем изображать теперь через  $e^x$ , где  $e$  имеет вышенаписанное значение.

9. Теперь не трудно решить уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} - h^2y = 0. \quad (32)$$

Рассуждая так же, как это сделано в § 6, получим решение его в виде:

$$v = Ce^{hx} + De^{-hx}, \quad (33)$$

где  $C$  и  $D$  — произвольные постоянные.

10. Выведем в заключение знаменитые формулы Эйлера.

Так как подстановка  $n = hi$ , где  $i^2 = 1$ , переводит уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -n^2 y \quad (1)$$

в уравнение

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = h^2 y, \quad (32)$$

то всякому частному интегралу первого уравнения из их совокупности

$$y = A \cos nx + B \sin nx$$

можно подставить во взаимно однозначное соответствие некоторый интеграл второго уравнения из их совокупности

$$y = Ce^{hx} + De^{-hx} \quad (33)$$

и отождествить тот и другой при условии  $n = \hbar i$ .

Рассмотрим, например, частный интеграл уравнения (1), определенный условиями:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos nx + B \sin nx, \\ f(0) &= A = 1, \\ f'(0) &= B = 0, \end{aligned}$$

т. е. рассмотрим функцию

$$F(x) = \cos nx.$$

Соответствующий частный интеграл уравнения (32) будет определен условиями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= Ce^{hx} + De^{-hx}, \\ \varphi(0) &= C + D = 1, \\ \varphi'(0) &= Ch - Dh = 0, \end{aligned} \right\}$$

или же условиями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= Ce^{hx} + De^{-hx}, \\ C &= \frac{1}{2}, \\ D &= \frac{1}{2}, \end{aligned} \right\}$$

т. е. соответствующий частный интеграл будет функцией:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(e^{hx} + e^{-hx}).$$

При дополнительном условии  $n = hi$  (или, что то же,  $h = -ni$ ) получаем тождественно:

$$F(x) = \Phi(x),$$

т. е.

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}). \quad (34)$$

Рассмотрим теперь частный интеграл уравнения (1), определенный условиями:

$$\begin{aligned} f(x) &= A \cos nx + B \sin nx, \\ f(0) &= A = 0, \\ f'(0) &= B = 1, \end{aligned}$$

т. е. рассмотрим функцию:

$$F_1(x) = \sin x;$$

соответствующий частный интеграл уравнения (32) будет определен условиями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= Ce^{hx} + De^{-hx}, \\ \varphi(0) &= C + D = 0, \\ \varphi'(0) &= Ch - Dh = 1, \end{aligned} \right\}$$

или же эквивалентными им условиями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x) &= Ce^{hx} + De^{-hx}, \\ C &= \frac{1}{2h}, \\ D &= -\frac{1}{2h}, \end{aligned} \right\}$$





Рассмотрим сначала тот случай, когда точка  $X$  лежит на биссектрисе  $AD$  внутреннего угла (фиг. 1). Воспользовавшись обозначениями чертежа, можем написать:

$$\begin{aligned} c^2 &= m^2 + a^2 - 2am \cos \delta, \\ BX^2 &= m^2 + x^2 - 2mx \cos \delta. \end{aligned}$$

Исключая из этих равенств  $m \cos \delta$ , найдем после небольших преобразований, что

$$BX^2 = \frac{1}{a} [ax^2 + (c^2 - m^2 - a^2)x + am^2].$$

Точно так же из треугольников  $ADC$  и  $CDX$  найдем:

$$CX^2 = \frac{1}{a} [ax^2 + (b^2 - n^2 - a^2)x + an^2].$$

Значит

$$[f(x)]^2 = \frac{x^2 + \frac{x}{a}(b^2 - n^2 - a^2) + n^2}{x^2 + \frac{x}{a}(c^2 - m^2 - a^2) + m^2},$$

и наша задача свелась к розысканию экстремума функции вида

$$\Phi(x) = \frac{x^2 + Mx + N}{x^2 + M_1x + N_1}.$$

Так как

$$\Phi'(x) = \frac{(M_1 - M)x^2 + 2(N_1 - N)x + (MN_1 - M_1N)}{(x^2 + M_1x + N_1)^2},$$

то значения  $x$ , при которых  $\Phi(x)$  может иметь экстремум, совпадают с корнями  $x_1$  и  $x_2$  уравнения

$$(M_1 - M)x_2 + 2(N_1 - N)x + (MN_1 - M_1N) = 0. \quad (1)$$

Полагая

$$D = (N_1 - N)^2 + (M_1 - M)(M_1N - MN_1),$$

найдем:

$$x_1 = \frac{1}{M_1 - M} [N - N_1 + \sqrt{D}], \quad x_2 = \frac{1}{M_1 - M} [N - N_1 - \sqrt{D}]. \quad (2)$$

Для доказательства того, что при найденных значениях  $x_1$  и  $x_2$  функция  $\Phi(x)$  имеет экстремум, а также для определения его характера, обращаемся ко второй производной:

$$\Phi''(x) = \frac{2(M_1 - M)x + 2(N_1 - N)}{(x^2 + M_1x + N_1)^2} - 2\Phi'(x) \frac{2x + M_1}{x^2 + M_1x + N_1}.$$

Почти без вычислений найдем, что

$$\Phi''(x_1) = \frac{2\sqrt{D}}{(x_1^2 + M_1x_1 + N_1)^2}; \quad \Phi''(x_2) = -\frac{2\sqrt{D}}{(x_2^2 + M_1x_2 + N_1)^2},$$

если, представив равенства (2) в виде:

$$(M_1 - M)x_1 + (N_1 - N) = \sqrt{D}; \quad (M_1 - M)x_2 + (N_1 - N) = -\sqrt{D},$$

заметим, что

$$\Phi'(x_1) = \Phi'(x_2) = 0.$$

Таким образом при положительном  $D$

$$\Phi''(x_1) > 0, \quad \text{а} \quad \Phi''(x_2) < 0,$$

откуда следует, что при  $x = x_1$  функция  $\Phi(x)$  имеет минимум, а при  $x = x_2$  — максимум.

Обращаясь теперь снова к первоначальной функции  $[f(x)]^2$ , мы найдем те значения  $x$ , при которых она принимает экстремум, положив в равенстве (2)

$$M = \frac{1}{\alpha}(b^2 - n^2 - a^2); \quad M_1 = \frac{1}{\alpha}(c^2 - m^2 - a^2); \quad N = n^2; \quad N_1 = m^2.$$

При этих значениях  $M, M_1, N, N_1$  имеем:

$$M_1 - M = \frac{4(c-b)}{\alpha(c+b)} p(p-a); \quad N_1 - N = \frac{a^2(c-b)}{c+b};$$

$$M_1 N - M N_1 = \frac{a^2 \gamma (c-b)}{c+b}; \quad D = a^2(c-b)^2,$$

потому что

$$m = \frac{ac}{c+b}, \quad n = \frac{ab}{c+b}.$$

Здесь, как обычно,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$ . Подставляя найденные выражения в равенство (2), получим:

$$x_1 = \frac{a\alpha}{2p}, \quad x_2 = -\frac{a\gamma}{2(p-a)}.$$

Правая часть первой формулы равна расстоянию точки  $D$  до точки пересечения  $F$  биссектрис внутренних углов треугольника  $ABC$ . Действительно, биссектриса  $CF$  делит сторону  $AD$  треугольника  $ADC$  на части прямо пропорциональные двум другим сторонам, поэтому

$$FD = \frac{\alpha n}{b+n} = \frac{\alpha}{bn^{-1}+1} = \frac{a\gamma}{2p}.$$

Точно также, рассматривая тот же треугольник  $ADC$  и биссектрису  $CF_1$ , найдем, что правая часть второй формулы равна расстоянию точки  $D$  до точки пересечения  $F_1$  биссектрис внешних углов  $ACM$  и  $ABM_1$ , которая, как известно, лежит на биссектрисе внутреннего угла  $A$ .

Следовательно, при  $c > b$  отношение расстояний точек биссектрисы внутреннего угла  $A$  до вершин  $C$  и  $B$  достигает своего минимума в точке пересечения биссектрис внутренних углов  $C$  и  $B$  и максимума — в точке пересечения биссектрис внешних углов  $C$  и  $B$ .

Имея этот результат, легко найдем и экстремальные значения. Для этого достаточно для минимума определить величину отрезков  $CF$  и  $BF_1$ , а для максимума — величину отрезков  $CF_1$  и  $BF$ . Ввиду того, что первые два отрезка делят пополам углы  $ACB$  и  $ABC$ , а вторые два — углы  $ACM$  и  $ABM_1$ , то

$$CF = \frac{FN}{\sin \frac{C}{2}}; \quad BF = \frac{FN}{\sin \frac{B}{2}}; \quad CF_1 = \frac{F_1N_1}{\cos \frac{C}{2}}; \quad BF_1 = \frac{F_1N_1}{\cos \frac{B}{2}}.$$

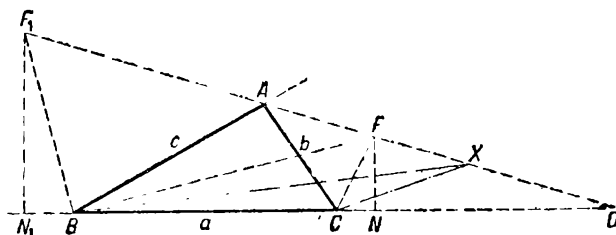
Таким образом искомые минимум и максимум рассматриваемой функции  $f(x)$  будут:

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}}; \quad \frac{CF_1}{BF_1} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}},$$

или, выражая синусы и косинусы половинных углов треугольника через стороны данного треугольника:

$$\frac{CF}{BF} = \sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{p-c}{p-b}}; \quad \frac{CF_1}{BF_1} = \sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{p}{p-c}}.$$

Если бы мы вместо биссектрисы внутреннего угла взяли биссектрису  $AD = \alpha$  (фиг. 2) внешнего угла  $A$ , то вопрос о разы-



Фиг. 2.

скании экстремума  $CX:BX$  привелся бы, как легко убедиться, проделав вычисления аналогичные предыдущим, к определению экстремума той же функции  $f(x)$ , только при

$$n = CD = \frac{ab}{c-b}, \quad m = BD = \frac{ac}{c-b}.$$

Соответственно этому изменят свою величину коэффициенты и дискриминант  $D$  уравнения (1), а именно:

$$M - M_1 = -\frac{4(c+b)}{\alpha(c-b)}(p-b)(p-c); \quad N_1 - N = \frac{a^2(c+b)}{c-b};$$

$$M_1N - MN_1 = \frac{a^2\alpha(c+b)}{c-b}; \quad D = a^2(c+b)^2.$$

Таким образом в этом случае минимум будет при

$$x_1 = \frac{ax}{2(p-b)},$$

а максимум при

$$x_2 = \frac{ax}{2(p-c)}.$$

Первое выражение есть расстояние точки  $D$  до  $F_1$  — точки пересечения биссектрис внешних углов  $A$  и  $C$ , а второе расстояние той же точки  $D$  до  $F_1$  — точки пересечения биссектрис внешних углов  $B$  и  $C$ . Следовательно, при  $c > b$  отношение расстояний точек биссектрисы внешнего угла  $A$  до вершин  $C$  и  $B$   $CX:BX$  достигает своего минимума и максимума соответственно в точках пересечения биссектрисы внешнего угла  $A$  с биссектрисами внешних углов  $C$  и  $B$ .

Как и в предыдущем случае, рассматривая прямоугольные треугольники  $CFN$ ,  $BFN$ ,  $CF_1N_1$  и  $BF_1N_1$ , найдем:

$$CF = \frac{FN}{\cos \frac{C}{2}}; \quad BF = \frac{FN}{\sin \frac{B}{2}};$$

$$CF_1 = \frac{F_1N_1}{\sin \frac{C}{2}}; \quad BF_1 = \frac{F_1N_1}{\cos \frac{B}{2}},$$

откуда следует, что минимум и максимум в данном случае соответственно равны:

$$\frac{CF}{BF} = \frac{\sin \frac{B}{2}}{\cos \frac{C}{2}}; \quad \frac{CF_1}{BF_1} = \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2}},$$

или, выражая их через стороны треугольника,

$$\frac{CF}{BF} = \sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{p-a}{p}}; \quad \frac{CF_1}{BF_1} = \sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{p}{p-a}}.$$

## ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ТРЕУГОЛЬНИКА

М. П. Черняев (Ростов-на-Дону)

Пусть дан треугольник  $ABC$ . Отнесем его к следующей системе прямоугольных координат: за начало координат возьмем вершину  $B$ ; за ось абсцисс примем направление стороны  $BC$ ; длины сторон  $BC$  и  $AB$  соответственно обозначим через  $2a$  и  $2c$ , а угол  $ABC = \beta$ . Тогда координаты вершин треугольника  $ABC$  будут:

$$A(2c \cos \beta, 2c \sin \beta), \quad B(0, 0) \quad \text{и} \quad C(2a, 0).$$

Пусть  $D(2\lambda, 0)$  переменная точка на стороне  $BC$ . Рассмотрим две переменных окружности:

1) окружность, проходящую через точки  $D$  и  $B$  и касающуюся стороны  $AB$  в вершине  $B$ ; ее уравнение будет:

$$x^2 + y^2 + 2\lambda \operatorname{ctg} \beta y - 2\lambda x = 0; \quad (1)$$

2) окружность, проходящую через точки  $D$  и  $C$  и касающуюся стороны  $AC$  в вершине  $C$ ; ее уравнение:

$$x^2 + y^2 - 2(a + \lambda)x - \frac{2(c \cos \beta - a)(a - \lambda)}{c \sin \beta} y + 4a\lambda = 0. \quad (2)$$

Докажем теорему: при любом положении переменной точки  $D$  на стороне  $BC$  радикальные оси кругов (1) и (2) проходят через фиксированную точку плоскости

Действительно, уравнение радикальной оси кругов (1) и (2):

$$(\lambda - a + c \cos \beta)y + xc \sin \beta = 2\lambda c \sin \beta. \quad (3)$$

Каково бы ни было значение переменного параметра  $\lambda$ , уравнение (3) удовлетворится следующими постоянными значениями неизвестных:

$$\left. \begin{aligned} x &= 2(a - c \cos \beta), \\ y &= 2c \sin \beta, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

что и требовалось доказать.

Определим геометрическое место второй точки пересечения кругов (1) и (2). Для этого решим совместно уравнения (1) и (3). Тогда параметрические уравнения искомого геометрического места будут:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2\lambda c [c + (\lambda - a) \cos \beta]}{(\lambda - a)^2 + c^2 + 2(\lambda - a)c \cos \beta}, \\ y &= \frac{2\lambda c (\lambda - a) \sin \beta}{(\lambda - a)^2 + c^2 + 2(\lambda - a)c \cos \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Исключая из системы (5) переменный параметр  $\lambda$ , получаем:

$$x^2 + y^2 - 2ax - \frac{2(c - a \cos \beta)}{\sin \beta} y = 0; \quad (6)$$

т. е. искомое геометрическое место точек пересечения окружностей (1) и (2) есть окружность, проходящая через вершину  $B$  и имеющая центр в точке

$$N \left[ a, \frac{c - a \cos \beta}{\sin \beta} \right]. \quad (7)$$

Определим еще огибающую линии центров переменных окружностей (1) и (2). Центры имеют координаты:

$$O_1 [\lambda, -\lambda \operatorname{ctg} \beta], O_2 \left[ a + \lambda, \frac{(c \cos \beta - a)(a - \lambda)}{c \sin \beta} \right].$$

Уравнение прямой  $O_1O_2$ :

$$(\lambda - a + c \cos \beta)x - yc \sin \beta - \lambda(\lambda - a) - 2\lambda c \cos \beta = 0. \quad (8)$$

Дифференцируя обе части последнего уравнения (8) по  $\lambda$ , имеем:

$$\lambda = \frac{x + a - 2c \cos \beta}{2}. \quad (9)$$

Внося выражение (9) в уравнение (8), получим уравнение искомой огибающей:

$$v = \frac{1}{4}(x - a)^2 + c^2 \cos^2 \beta, \quad (10)$$

т. е. искомая огибающая есть парабола.

## СВЯЗЬ АСТРОИДЫ И ЧЕТЫРЕХЛЕПЕСТКОВОГО ВЕНЧИКА

Д. М. Синцов (Харьков)

Для астроида

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

известен целый ряд построений: 1) это — гипоциклоида, когда радиус катящегося круга вчетверо менее радиуса неподвижного; 2) это — огибающая прямой постоянной длины  $2a$ , движущейся, опираясь своими концами на две взаимно перпендикулярные прямые; 3) проектированием точки окружности радиуса  $a$  с центром в начале координат на ось  $x$ -ов, отсюда на радиус и снова на ось  $x$  ов получаем абсциссу точки астроида:  $x = a \cos^3 t$ ; аналогичным проектированием на ось  $y$ -ов получаем ординату  $y = a \sin^3 t$ . Наконец, 4) то же параметрическое уравнение астроида получим несколько иначе, если вместо круга радиуса  $a$  возьмем, как во втором случае, прямую постоянной длины  $2a$ , встречающую ось  $x$  ов в точке  $A$ , ось  $y$ -ов в точке  $B$ , и дополним треугольник  $AOB$  до прямоугольника, проведя  $AD \parallel OY$  и  $BD \parallel OX$ . Перпендикуляр из четвертой вершины  $D$  на диагональ  $AB$  встречает  $AB$  в точке  $M$  астроида. Это построение известно и встречается в ряде задачников.

Последнее построение интересно тем, что приводит к курьезной связи астроида с четырехлепестковым венчиком, точки которого получаем, опуская перпендикуляр  $ON$  из начала  $O$  на ту же диагональ  $AB$  (фиг. 1). Точка  $N$  принадлежит венчику, который, таким образом, есть подэра астроида в отношении начала.

Это также, конечно, известно. Но обратим внимание на то, что  $\triangle BON = \triangle AMD$  и  $BN = AM$ . Таким образом точки  $M$  астроида и  $N$  венчика равноудалены от середины  $S$  линии  $AB$ .



Обозначим величину заданного острого угла  $ABC$  через  $\varphi$  и положим  $BA = k$ ; из треугольника  $ABD$  находим:

$$AD = k \sin \varphi, \quad BD = k \cos \varphi.$$

Обозначим величины полученных путем построения углов через  $\alpha$  и  $\beta$ :  $\angle FBC = \alpha$ ;  $\angle EBC = \beta$ . Из треугольников  $FDG$  и  $EDH$  следует:

$$FG = \frac{1}{2} \quad FD = \frac{1}{2} \quad AD = \frac{1}{2} k \sin \varphi. \quad (1)$$

$$EH = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad DE = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad AD = \frac{\sqrt{3}}{2} k \sin \varphi. \quad (2)$$

$$DG = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad DF = \frac{\sqrt{3}}{2} k \sin \varphi,$$

$$DH = \frac{1}{2} \quad DF = \frac{1}{2} k \sin \varphi.$$

Из треугольников  $FBG$  и  $EBH$  имеем:

$$FG = BG \operatorname{tg} \alpha = (BD + DG) \operatorname{tg} \alpha = k \left( \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \operatorname{tg} \alpha, \quad (3)$$

$$EH = BH \operatorname{tg} \beta = (BD + DH) \operatorname{tg} \beta = k \left( \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \operatorname{tg} \beta. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (1) и (3), (2) и (4), после сокращения на  $k$ , получим:

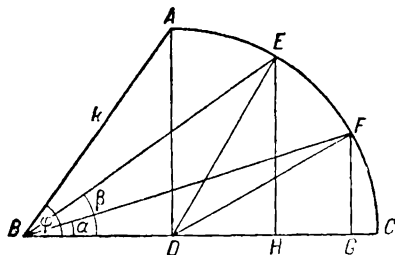
$$\frac{1}{2} \sin \varphi = \left( \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi = \left( \cos \varphi + \frac{1}{2} \sin \varphi \right) \operatorname{tg} \beta.$$

Отсюда:

$$\alpha = \operatorname{arccctg} (2 \operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}),$$

$$\beta = \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \operatorname{ctg} \varphi + 1).$$



Фиг. 1.

Ошибки же, которые мы будем делать, заменяя  $\frac{\varphi}{3}$  через  $\alpha$  и  $\frac{2}{3}\varphi$  через  $\beta$ , мы можем выразить следующим образом:

$$x = \operatorname{arccctg} (2 \operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3}) - \frac{\varphi}{3},$$

$$y = \operatorname{arccctg} \frac{1}{\sqrt{3}} (2 \operatorname{ctg} \varphi + 1) - \frac{2}{3} \varphi.$$

Величины  $x$  и  $y$  представляют собой функции от  $\varphi$ . Для нас интересно определить, при каких значениях аргумента эти функции достигают максимума и минимума. Но прежде всего заметим, что

$$\text{при } \varphi = 0, \quad \alpha = 0;$$

$$\text{при } \varphi = 45^\circ, \operatorname{ctg} \alpha = 2 + \sqrt{3}, \alpha = 15^\circ;$$

$$\text{при } \varphi = 90^\circ, \operatorname{ctg} \alpha = 1/\sqrt{3}, \alpha = 30^\circ.$$

Таким образом ошибка  $x = 0$  при  $\varphi = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ , т. е. в этих трех случаях предлагаемый способ трисекции угла является точным. Аналогично можно убедиться в том, что  $y = 0$  при тех же значениях  $\varphi$ .



Будем теперь искать максимум и минимум функции  $x$  обычным способом, для чего продифференцируем последнюю по  $\varphi$ . Получим:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{1}{1 + (2 \operatorname{ctg} \varphi + \sqrt{3})^2} \cdot \left( -\frac{2}{\sin^2 \varphi} \right) - \frac{1}{3} = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot \sin 2\varphi}{3(2 + \sqrt{3} \sin 2\varphi)}.$$

Приравняв  $\frac{dx}{d\varphi}$  нулю, получим уравнение относительно  $\varphi$ :

$$1 - \sqrt{3} \sin 2\varphi = 0,$$

дающее нам нужные значения  $\varphi$ . Имеем:

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Пользуясь таблицами логарифмов, сейчас же найдем, что

$$\begin{aligned} 2\varphi &= 35^\circ 15' 53''; & \varphi_1 &= 17^\circ 37' 56'', \\ 2\varphi &= 144^\circ 44' 07''; & \varphi_2 &= 72^\circ 22' 04''. \end{aligned}$$

Одно из этих значений  $\varphi$  дает минимум функции, другое — максимум. Найдем теперь соответствующие значения  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{arccctg} (2 \operatorname{ctg} 17^\circ 37' 56'' + \sqrt{3}) - 5^\circ 52' 39'' = \\ &= \operatorname{arccctg} 8,0247 - 5^\circ 52' 39'' = 7^\circ 06' 12'' - 5^\circ 52' 39'' = 1^\circ 13' 33'', \\ x_2 &= \operatorname{arccctg} (2 \operatorname{ctg} 72^\circ 22' 04'' + \sqrt{3}) - 24^\circ 07' 21'' = \\ &= \operatorname{arccctg} 2,36772 - 24^\circ 07' 21'' = 22^\circ 53' 48'' - 24^\circ 07' 21'' = \\ &= -1^\circ 13' 33''. \end{aligned}$$

Таким образом максимальная ошибка для первой трети угла получается при  $\varphi_1 = 17^\circ 37' 56''$ . Она равна  $1^\circ 13' 33''$ , т. е. угол будет получаться больше, чем нужно на  $1^\circ 13' 33''$ . Затем при  $\varphi_2 = 72^\circ 22' 04''$  ошибка будет равна  $-1^\circ 13' 33''$ , т. е. угол будет получаться меньше, чем нужно на  $1^\circ 13' 33''$ .

Найдем теперь максимальное значение для  $y$ , для чего продифференцируем  $y$  по  $\varphi$ .

$$\begin{aligned} \frac{dy}{d\varphi} &= -\frac{1}{1 + \frac{1}{3}(2 \operatorname{ctg} \varphi + 1)^2} \cdot \left( -\frac{2}{\sqrt{3} \sin^2 \varphi} \right) - \frac{2}{3} = \\ &= \frac{3\sqrt{3} - 4 - 2 \sin 2\varphi}{3(2 + \sin 2\varphi)}. \end{aligned}$$

Полагая  $\frac{dy}{d\varphi} = 0$ , имеем:

$$3\sqrt{3} - 4 - 2 \sin 2\varphi = 0; \quad \sin 2\varphi = \frac{3\sqrt{3} - 4}{2} = 0,59807.$$

Следовательно

$$\begin{aligned} 2\varphi &= 36^\circ 43' 53''; & \varphi_1 &= 18^\circ 21' 56'', \\ 2\varphi &= 143^\circ 16' 07''; & \varphi_2 &= 71^\circ 38' 04''. \end{aligned}$$

Соответствующие значения  $y$  равны:

$$\begin{aligned} y_1 &= \operatorname{arccctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} 18^\circ 21' 56'' + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 12^\circ 14' 37'' = \\ &= \operatorname{arccctg} 4,0555 - 12^\circ 14' 37'' = 13^\circ 51' 07'' - 12^\circ 14' 37'' = 1^\circ 36' 30'', \\ y_2 &= \operatorname{arccctg} \left( \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} 71^\circ 38' 04'' + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 46^\circ 45' 23'' = \\ &= \operatorname{arccctg} 0,9607 - 47^\circ 45' 23'' = 46^\circ 8' 53'' - 47^\circ 45' 23'' = -1^\circ 36' 30''. \end{aligned}$$

Таким образом для второй трети угла максимальная ошибка будет при  $\varphi = 18^{\circ}21'56''$ . Угол будет получаться больше, чем нужно на  $1^{\circ}6'0''$ . Затем при  $\varphi = 71^{\circ}38'04''$  угол будет получаться меньше, чем нужно на  $1^{\circ}36'30''$ .

Выводы. Рассматриваемый нами способ трисекции угла дает точные результаты при  $\varphi = 45^{\circ}$ . Для углов, меньших  $45^{\circ}$ , первая треть угла будет больше, чем нужно, а последняя треть (третья) меньше, чем нужно. Максимальная ошибка будет примерно при  $\varphi = 18^{\circ}$ . В этом случае первая треть угла будет больше, чем нужно на  $1^{\circ}14'$ , а третья треть меньше, чем нужно на  $1^{\circ}37'$ . Для углов, больших  $45^{\circ}$ , первая треть угла будет меньше, чем нужно, а третья треть больше. Максимальная ошибка будет при  $\varphi = 72^{\circ}$ . В этом случае первая треть угла будет меньше, чем нужно на  $1^{\circ}14'$ , а третья треть больше, чем нужно на  $1^{\circ}37'$ .

---

# ПОСТРОЕНИЕ СТЕРЕОСКОПИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Г. А. Владимирский (Москва)

## Стереоскоп как учебное пособие

Стереоскопия является весьма ценным учебно-вспомогательным средством при изучении всех тех дисциплин (в первую очередь стереометрии), где требуется развитие пространственного воображения, умение разбираться в деталях пространственных фигур и понимание технических чертежей. Главным препятствием к распространению стереоскопа как наглядного пособия служит неосведомленность преподавателей о способах построения стереоскопических чертежей вследствие полного отсутствия указаний по этому вопросу в литературе.

Предлагаемый в настоящей статье способ построения стереоскопических проекций несложных геометрических фигур, разработанный для оптического стереоскопа, но легко применимый и к зеркальному стереоскопу, а также и к построению анаглифов<sup>1)</sup>, вполне доступен каждому преподавателю, владеющему основными приемами технического черчения, и дает ему возможность иллюстрировать стереоскопически любую теорему и задачу из отдела стереометрии, а также из области проекционного черчения и по ряду других дисциплин, причем приготовление чертежа средней сложности отнимает у него 20—40 минут.

## Основы геометрического проектирования, необходимые для построения стереоскопических проекций

Построение стереоскопических проекций в своем принципе основано на центральном проектировании данной фигуры из двух центров проекций. Поэтому задача о построении стереоскопических проекций распадается на две части. Во-первых, нужно найти простой способ построения центральных проекций данной фигуры и, во-вторых, установить конструктивную связь (и числовую зависимость) между центральными проекциями одной

---

<sup>1)</sup> Анаглифом называются очки, одно стекло которых синее, а другое — красное. При рассматривании через эти очки, один глаз видит лишь то, что нарисовано красным, а другой — то, что нарисовано синим. Если рисунок выполнен по правилам стереоскопии, получается впечатление пространственного расположения. (Ред.).

и той же фигуры из двух центров проекций, необходимую для получения эффекта стереоскопичности.

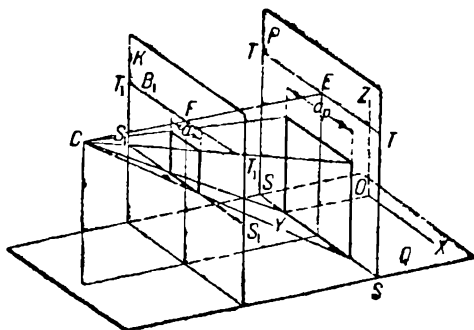
Существуют разные способы построения центральных проекций. Самым простым и удобным для наших целей является так называемый координатный способ. Для этого следует себе представить систему трех осей координат, расположенных так, чтобы плоскость  $XOY$  совмещалась с предметной плоскостью  $Q$  (фиг. 1), при этом ось  $OX$  была параллельна основанию картинной плоскости  $K$ , а ось  $OY$  перпендикулярна к ней и направлена к глазу  $C$ ; тогда ось  $OZ$  будет перпендикулярна к предметной плоскости и направлена вертикально вверх. При рассмотрении чертежа в линзы стереоскопа может быть легко обозрима лишь небольшая площадь картинной плоскости; поэтому заранее следует ограничить поле зрения картинной плоскости некоторым квадратом со стороной  $a$ . Вместе с тем удобно рассматривать этот квадрат как проекцию некоторого квадрата, взятого на переднем плане  $P$  фигуры. Соотношение между длинами сторон этих двух квадратов, определяемое из пропорции

$$\frac{a_p}{a} = \frac{D_0}{d},$$

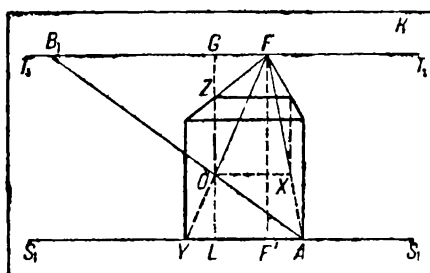
где  $CE = D_0$ ,  $CF = d$ ,  $F$  — главная точка схода. Оси координат следует расположить так, чтобы ось  $OY$  упиралась в левый ниж-

ний угол квадрата, а начало координат отстояло от переднего плана на длину, равную стороне этого квадрата. Внутри этого координатного октанта и следует располагать проектируемые фигуры, чтобы они полностью видны были в стереоскоп.

Чтобы построить проекцию этого координатного октанта-куб., нужно иметь заданными величину  $H$  — высоту горизонта  $TT$  над предметной плоскостью — и, кроме того, величины  $a$ ,  $D_0$  и  $d$ , значения которых указаны выше. Построения можно выполнить следующим образом (фиг. 1 и фиг. 2). Провести горизонтальную прямую  $S_1S_1$  — проекцию основания переднего плана; построить на этой прямой квадрат со стороной  $a$ ; вычислить



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$h$  — высоту горизонта  $T_1T_1$  над основанием  $S_1S_1$  из соотношения

$$\frac{h}{H} = \frac{d}{D_0}$$

и на расстоянии  $h$  от  $S_1S_1$  провести линию горизонта  $T_1T_1$  параллельно  $S_1S_1$ ; отметить где-нибудь на линии горизонта  $T_1T_1$  главную точку схода  $F$ ; соединить с точкой  $F$  вершины квадрата. Проведенные прямые будут проекциями ребер куба, перпендикулярных к картинной плоскости (фиг. 2); далее, чтобы построить проекцию начала координат  $O$ , нужно построить проекцию диагонали квадрата  $XOY$ ; для этого нужно влево от точки  $F$  по линии горизонта отметить точку расстояний  $B_1$  так, чтобы  $B_1F = d$ , и соединить  $B_1$  с  $A$ ; полученная прямая, по закону точки схода, является проекцией прямой, наклоненной к линии  $S_1S_1$  под углом в  $45^\circ$ ; следовательно, точка  $O$  представит начало координат. Проекции осей  $OX$  и  $OZ$  не трудно получить, проводя из точки  $O$  горизонтальную и вертикальную прямые.

Если провести дополнительно, как указано на чертеже (фиг. 2), прямые  $FF'$  и  $GL$ , то, рассматривая чертеж в плоскости  $K$ , из треугольника  $YOL$  можно написать:

$$OL = YO \sin \angle OYL.$$

Введя обозначения:  $\angle OYL = \gamma$ ,  $YO = \lambda a$ , где  $a = YA$ ,  $\lambda$  можно назвать „условным коэффициентом искажения“, найдем:

$$OL = \lambda a \sin \gamma.$$

Из подобия треугольников  $FOB_1$  и  $YOA$  имеем:

$$\frac{OG}{OL} = \frac{d}{a}.$$

Составляя производную пропорцию

$$\frac{OG + OL}{OL} = \frac{d + a}{a}$$

и замечая, что  $OG + OL = FF' = h$ , найдем:

$$\frac{h}{\lambda a \sin \gamma} = \frac{d + a}{a},$$

откуда

$$h = \lambda (d + a) \sin \gamma. \quad (1)$$

Выбор точки зрения относительно картинной плоскости, вообще говоря, произволен. Но, чтобы чертеж имел наибольшее сходство с общепринятым, исполненным в косоугольных проекциях, нужно взять точку зрения или, что то же, точку  $F$  на плоскости чертежа так, чтобы проекция по крайней мере одного из ребер-ортогоналей была наклонена к горизонтальному ребру под углом в  $45^\circ$  и длина этого ребра на чертеже составляла половину длины горизонтального ребра переднего плана. Эти тре-





Напишем производную пропорцию:

$$\frac{h_1}{h - h_1 + h_1} = \frac{a - ny_1}{d + (a - ny_1)},$$

откуда

$$h_1 = \frac{h(a - ny_1)}{d + (a - ny_1)}. \quad (3)$$

Из прямоугольного треугольника  $YL_1N_1$  найдем:

$$YN_1 = \frac{N_1L_1}{\sin \angle N_1YL_1},$$

или

$$\lambda a - \bar{y}_1 = \frac{h(a - ny_1)}{[d + (a - ny_1)] \sin \gamma},$$

откуда

$$\bar{y}_1 = \lambda a - \frac{h(a - ny_1)}{[d + (a - ny_1)] \sin \gamma}. \quad (4)$$

Сравнивая формулы (3) и (4), мы должны отдать предпочтение первой из них в силу ее значительно большей простоты. Пользуясь величиной  $h_1$ , которую можно откладывать на любом перпендикуляре к прямой  $YA$ , легко найдем точку  $N_1$  на оси  $OY$ , проведя через конец перпендикуляра  $h_1$  прямую параллельно  $YA$ .

Чтобы найти длину  $x_1$ , рассмотрим подобные треугольники  $M_1FN_1$  и  $A_2FY$ , из которых найдем, что

$$\frac{N_1M_1}{YA_2} = \frac{FF_1}{FF_1},$$

или

$$\frac{\bar{x}_1}{nx_1} = \frac{h - h_1}{h}.$$

Вместе с тем возьмем из подобия треугольников  $YN_1A_1$  и  $FN_1B$  пропорцию

$$\frac{G_1N_1}{N_1L_1} = \frac{BF}{YA_1}$$

и напишем от нее производную пропорцию:

$$\frac{G_1N_1}{G_1N_1 + N_1L_1} = \frac{BF}{BF + YA_1},$$

или

$$\frac{h - h_1}{h} = \frac{d}{d + (a - ny_1)}.$$

Сопоставляя полученное равенство с вышенаписанным получим:

$$\frac{\bar{x}_1}{nx_1} = \frac{d}{d + (a - ny_1)},$$

откуда

$$\bar{x}_1 = \frac{d \cdot nx_1}{d + (a - ny_1)}. \quad (5)$$



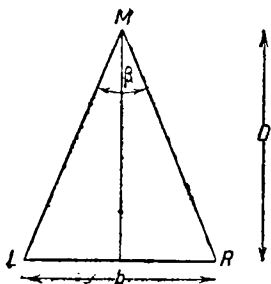
Если точка  $M_1$  находится вне плоскости  $XOY$ , то нужно уметь вычислять длину аппликаты  $\bar{z}_1$ . Так как перспективные искажения масштаба аппликаты одинаковы с такими же искажениями абсциссы для одних и тех же значений ординаты, то значение  $\bar{z}_1$  легко получается из формулы (5) путем простой замены букв:

$$\bar{z}_1 = \frac{d \cdot n z_1}{a + (a - n y_1)}. \quad (6)$$

Формулы (3), (5), (6) весьма удобны для построения координатных схем крупных размеров по данным числовым значениям координат вершин координатного октанта. Такие схемы нужны для зеркального стереоскопа и особенно для анаглифов, для которых размеры чертежей неограничены. Для стереоскопа с линзами, где размеры чертежа очень невелики, крупными схемами можно пользоваться для более точного построения чертежа с последующим затем уменьшением его фотографическим путем.

### Принципы рельефного видения; условия восприятия рельефности пространственных фигур

Не вдаваясь в подробности рассмотрения весьма сложного психофизического акта, лежащего в основе восприятия глубины пространства, мы рассмотрим лишь интересующую нас геометрическую сторону этого явления. С этой точки зрения основным условием, определяющим впечатление глубины пространства, является наличие некоторого угла между оптическими осями глаз, образуемого при рассматривании какой-либо точки пространства (фиг. 5). Этот угол  $LMR$  называется параллактическим углом, а расстояние между оптическими центрами глаз  $LR$  — базисом.



Фиг. 5.

Численное значение последнего обыкновенно принимается равным 65 мм. Если обозначить  $\angle LMR = \beta$  и  $LR = b$ , то, при простейшем расположении точки  $M$ , найдем из чертежа следующую зависимость:

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \frac{b}{2D}.$$

Практически ввиду малости угла  $\beta$  можно приближенно считать при всяком расположении точки  $M$  в пределах поля ясного зрения

$$\operatorname{arc} \beta = \frac{b}{D}. \quad (7)$$

Исследования свойств глаза показывают, что глаз чувствителен не столько к оценке параллактического угла данной точ-

ки, сколько к ощущению разности параллактических углов двух точек  $M_0$  и  $M_1$ , расположенных вблизи друг от друга. Эта разность называется бинокулярным параллаксом и выражается, очевидно, равенством

$$\arg \beta = \arg \beta_0 - \arg \beta_1 = \frac{b(D_1 - D_0)}{D_0 \cdot D_1},$$

где  $\beta_0 > \beta_1$  и  $D_0 < D_1$ . Обозначая весьма малую разность  $D_1 - D_0 = \Delta D_0$  и считая приближенно  $D_0 \cdot D_1 \approx D_0^2$ , получим для бинокулярного параллакса формулу

$$\Delta \arg \beta_0 = \frac{b \cdot \Delta D_0}{D_0^2}. \quad (8)$$

Исследования показывают, что чувствительность нормального глаза к „порогу глубины“  $\Delta \arg \beta$  можно принять равной  $5''$ .

При построении стереоскопических проекций можно, таким образом, решать вопрос об осязательности линейной глубины  $\Delta D$  фигуры при данных  $b$  и  $D_0$ .

Соотношение (8) вместе с тем показывает, что ощущение рельефности быстро уменьшается с удалением предмета от глаза. Следовательно, при построении стереоскопических проекций выгодно располагать проективную фигуру возможно ближе к центру проекций.

### Условия рельефного видения стереоскопических чертежей

Стереоскопические изображения предмета весьма просто получаются фотографическим путем. Фиг. 6 изображает схематически положение объективов  $C_r$  и  $C_l$  визируемой точки  $M$  и ее изображений  $M_r$  и  $M_l$ ; параллельные прямые  $C_r F_r$  и  $C_l F_l$  являются оптическими осями объективов.

Если повернуть изображения  $M_r$  и  $M_l$  на  $180^\circ$  вокруг оптических осей и одновременно перегнуть нижнюю часть фиг. 10 вокруг прямой  $C_r C_l$  вверх (фиг. 7), то получится схема стереоскопа. Если, поместив глаза на место  $C_r$  и  $C_l$ , рассматривают точки  $M_r$  и  $M_l$  так, чтобы правый глаз видел только правую точку, а левый только левую, то, как видно из чертежа, оси глаз пересекутся в некоторой точке  $M$ . Следовательно, глаза будут искусственно поставлены в такие условия, в которых они в естественной обстановке рассматривали бы точку  $M$ . Таким образом в результате одновременного раздельного рассматривания глазами двух точек  $M_r$  и  $M_l$  получается впечатление пространственного расположения одной точки  $M$ .

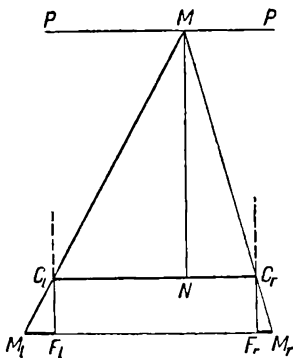
Роль стереоскопа, какой бы системы он ни был, заключается в том, чтобы облегчить глазам конвергенцию, т. е. установку оптических осей под некоторым углом, стороны которого проходили бы через точки  $M_r$  и  $M_l$ .

Фиг. 7 позволяет установить определенную зависимость в расположении точек  $M$ ,  $M_r$ ,  $M_l$  и центров  $C_r$  и  $C_l$ . Сохраняя принятые выше термины и обозначения, из подобия треугольников  $C_rNM$  и  $M_rF_rC_r$  находим:

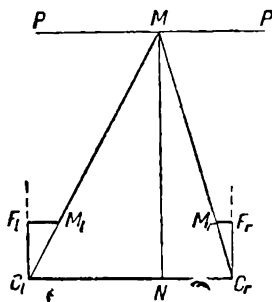
$$M_rF_r = \frac{C_rN \cdot d}{D},$$

аналогично из треугольников  $C_lNM$  и  $M_lF_lC_l$  находим:

$$M_lF_l = \frac{C_lN \cdot d}{D}.$$



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Складывая почленно эти два равенства, обозначая  $M_rF_r + M_lF_l = p$  и замечая из чертежа, что  $C_rN + NC_l = b$ , получим

$$p = \frac{bd}{D}. \quad (9)$$

Величина  $p$  называется стереоскопическим параллаксом точки  $M$ . При неизменных  $b$  и  $d$ , практически, в пределах поля ясного видения, в условиях центрального проектирования, величина  $p$  остается неизменной, если точка  $M$  перемещается в плоскости  $P$ , отстоящей от базиса на расстоянии  $D$ ; поэтому величину  $p$  можно назвать стереоскопическим параллаксом плоскости  $P$ .

Так как отрезки  $F_rM_r$  и  $F_lM_l$ , из которых складывается величина  $p$ , направлены в разные стороны от соответствующих оптических осей, то, для удобства построения стереоскопических чертежей, следует придавать числам, выражающим эти отрезки, разные знаки; при этом для нашего построения удобно считать положительным направление влево от каждой из оптических осей. В таком случае, обозначая  $F_rM_r = \xi_r$  и  $F_lM_l = -\xi_l$ , мы должны будем написать:

$$p = \xi_r - \xi_l, \quad (10)$$

или

$$\xi_l = \xi_r - p. \quad (10')$$

Формула (10') решает вопрос о построении левого стереоскопического чертежа, если построен правый. Принципиально можно сказать, что, если построена проекция фигуры или, что лучше, координатная схема для правого чертежа (фиг. 8), то построение каждой точки левой схемы можно сделать по одноименным точкам правой схемы, измерив и вычислив для каждой из них значения  $\xi$ , и  $p$ .

Формулы (7) и (9) позволяют установить связь между параллактическим углом  $\beta$ , бинокулярным параллаксом  $\Delta \text{arc } \beta$  и стереоскопическим параллаксом  $p$ . В самом деле, сопоставляя равенства (7) и (9), находим:

$$\text{arc } \beta = \frac{p}{d};$$

тогда для бинокулярного параллакса двух точек  $\Delta \text{arc } \beta = \text{arc } \beta_0 - \text{arc } \beta_1$  получим новое выражение:

$$\Delta \text{arc } \beta = \frac{p_0 - p_1}{d}. \quad (11)$$

Эта формула показывает, что разность стереоскопических параллаксов двух точек стереоскопического чертежа приводит к некоторому определенному бинокулярному параллаксу, а следовательно, обуславливает впечатление рельефности изображений и ощущение кажущегося пространственного расположения точек. Эта же формула позволяет при построении стереоскопических проекций устанавливать предельную наименьшую, имеющую практическое значение, величину разности  $p_0 - p_1$  если считать „порогом глубины“, как сказано выше,  $\Delta \text{arc } \beta = \text{arc } 5''$ . Значение этого минимума  $p_0 - p_1$  в свою очередь предъявляет определенные требования к степени точности при выполнении чертежей.

### Приемы вычерчивания стереоскопических проекций

Вся работа по выполнению стереоскопического чертежа, после того как выбран объект проектирования, распадается на следующие основные моменты: 1) выбор и вычисление величин, необходимых для построения соответствующей координатной схемы стереоскопических проекций, 2) вычерчивание этой схемы и 3) вычерчивание проекций данной фигуры.

### Выборы величин для координатной схемы

Из вышеизложенного следует, что для построения стереоскопических чертежей могут быть произвольно взяты следующие величины:

•

1.  $b$  — базис; обычно следует брать  $b = 65$  мм.
2.  $d$  — расстояние от базиса до плоскости проекций; удобно брать 150—200 мм.
3.  $a$  — длина стороны квадрата, ограничивающего поле зрения на плоскости проекций; для употребительных стереоскопов с линзами  $a = 50$  мм и не более 60 мм.
4.  $D_0$  — расстояние до плоскости переднего плана; можно брать от 1000 мм и более в зависимости от формы фигуры.

Кроме того, для одной половины чертежа, условимся считать для правой, можно произвольно взять:

5.  $\gamma_r$  — угол наклона к основанию картины проекции крайней левой ортогонали, принимаемой за ось  $OY$ ; для учебно-вспомогательных чертежей  $\gamma_r = 45^\circ$ .
6.  $\lambda$  — условный коэффициент искажения отрезка  $a$  на оси  $OY$  сравнительно с отрезком  $a$ , взятым на основании картинной плоскости; для учебно-вспомогательных чертежей  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

После сделанного выбора должны быть вычислены следующие величины:

7.  $p_0$  — стереоскопический параллакс плоскости переднего плана фигуры:

$$p_0 = \frac{bd}{D_0}.$$

8.  $h$  — высота линии горизонта над проекцией основания переднего плана;

$$h = \lambda (d + a) \sin \gamma_r$$

если  $\lambda = \frac{1}{2}$  и  $\gamma_r = 45^\circ$ , то

$$h = \frac{(d + a)\sqrt{2}}{4}.$$

9.  $\xi_r$  — расстояние по прямой, изображающей основания переднего плана, от проекции на эту прямую главной точки схода до оси  $Y_r$ :

$$\xi_r = h \operatorname{tg} \gamma_r;$$

при

$$\gamma_r = 45^\circ,$$

$$\xi_r = h.$$

10.  $\xi_l$  — такое же расстояние на левом чертеже:

$$\xi_l = \xi_r - p_0.$$

Дополнительно, без непосредственной надобности при построении чертежа, можно иметь в виду следующие величины:

11.  $a_p$  — линейные размеры квадрата на переднем плане фигуры, помещающегося в квадрате поля зрения на чертеже:

$$a_p = \frac{aD_0}{d}.$$

12.  $H$  — высоту глаза над предметной плоскостью:

$$H = \frac{h \cdot D_0}{d}.$$

13.  $\alpha_0$  — угол зрения, под которым виден отрезок длины  $a_p$  на переднем плане фигуры:

$$\alpha_0 = 2 \operatorname{arctg} \frac{a_p}{2D_0}.$$

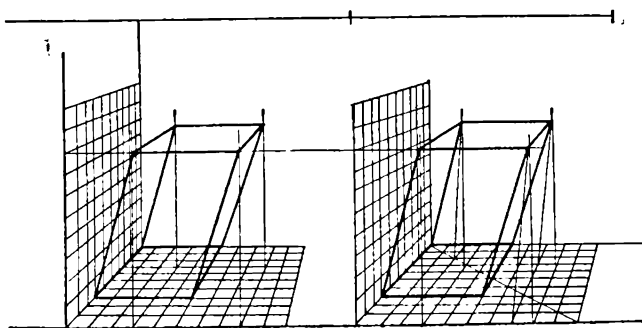


Таблицы величин для построения координатной схемы стереоскопических проекций

№	Величины, произвольно взятые					Величины, вычисленные для построения								Дополнительные величины			
	b	d	a	D <sub>0</sub>	γ <sub>r</sub>	λ	d:D <sub>0</sub>	p <sub>0</sub>	h	ξ <sub>r</sub>	ξ <sub>l</sub>	p <sub>0</sub> +b	ξ <sub>r</sub> +b	L <sub>0</sub>	H <sub>0</sub>	α <sub>0</sub>	β <sub>0</sub>
в миллиметрах																	
1	65	150	50	1000	45°	1/2	1:6,67	9,8	70,7	70,7	60,9	74,8	135,7	333	471	18°26'	3°43'
2		200					1:5	13,0	88,3	88,3	75,3	78,0	153,3	250	441	14°02'	3°43'
3		120		1500			1:12,5	5,2	60,1	60,1	54,9	70,2	125,1	625	751	22°35'	2°29'
4		150					1:10	6,5	70,7	70,7	64,2	71,5	135,7	500	707	18°26'	2°29'
5		200					1:7,5	8,6	88,3	88,3	79,7	73,6	153,3	375	662	14°02'	2°29'
6		120		2000			1:16,6	3,9	60,1	60,1	56,2	68,9	125,1	830	997	22°35'	1°52'
7		150					1:13,3	4,8	70,7	70,7	65,9	69,8	135,7	666	940	18°26'	1°52'
8		200					1:10	6,5	88,3	88,3	81,8	71,5	153,3	500	883	14°02'	1°52'
9		120		3000			1:25	2,6	60,1	60,1	57,5	67,6	125,1	1250	1503	22°35'	1°15'
10		150					1:20	3,3	70,7	70,7	67,4	68,3	135,7	1000	1414	18°26'	1°15'
11		200					1:15	4,3	88,3	88,3	84,0	69,3	153,3	750	1324	14°02'	1°15'

## Построение стереоскопических проекций геометрических фигур

Выбрав какую-нибудь геометрическую (прямолинейную) фигуру для стереоскопического изображения, нужно подобрать ее размеры в условных единицах координатной схемы так, чтобы она целиком помещалась внутри координатного октанта этой схемы. Затем по размерам фигуры и ее положению нужно найти координаты точек, определяющих очертания фигуры и по этим координатам построить взятую фигуру в каждом из октантов схемы. Построение следует делать легким нажимом



Фиг. 9.

карандаша непосредственно по схеме; по окончании построения нужно проверить чертеж через стереоскоп и затем перевести его на лист чистой плотной бумаги, подложенной под схему, прокалывая тонкой иголкой все точки, определяющие очертания фигуры; сняв схему, соединить при помощи рейсфедера полученные точки прямыми и обрезать чертеж, придав ему размеры прямоугольника  $18 \times 9 \text{ см}^2$  (фиг. 9). Использованную схему привести в порядок, стерев с нее карандаш мягкой резинкой.



# АКСИОМЫ, ЭМПИРИЧЕСКИЕ ЗАКОНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КОНСТРУКЦИИ

О. Гельдер <sup>1)</sup>

## 1. Законы арифметики

В то время как при обосновании геометрии издавна прибегают к помощи аксиом, а в построениях математической физики исходят из эмпирических законов, в арифметике прежде не упоминали ни об аксиомах, ни о каких-либо специальных гипотезах. Между тем в новейшее время некоторые арифметические законы иногда называют аксиомами. Так, например, Гильберт, сейчас правда стоящий на иной точке зрения, называл равенства

$$a \cdot b = b \cdot a, \quad (1)$$

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad (2)$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (3)$$

вместе с двумя другими, „аксиомами счета“. Гельмгольц, напротив, рассматривал в качестве истинных аксиом арифметики постулаты:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1, \quad (4)$$

$$(a + 1) \cdot b = a \cdot b + b, \quad (5)$$

которыми еще до него пользовался Грассман.

Два последних постулата примыкают к воззрениям Лейбница, согласно которым число является всего лишь символом, определяющим известное место в ряду

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots \quad (6)$$

Действие прибавления единицы к какому-либо числу отождествляется тогда с операцией перехода от одного символа ряда к непосредственно за ним следующему, после чего в силу этого определения и условия, что  $1 \cdot b = b$ , формулами (4) и (5) последовательно определяются действия сложения и умножения.

На определении (4) основывается знаменитое доказательство Лейбница формулы  $2 + 2 = 4$ . Из (4) получаем, принимая во внимание принятый ряд (6), символ

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

---

<sup>1)</sup> Реферат статьи из журнала „Scientia“, т. XXIV, № 5.

Конечно, подобным же образом можно с помощью равенств (4) и (5) доказать любую частную числовую формулу, например ту, на которую постоянно ссылался Кант в подтверждение своей арифметической концепции. Можно было бы также для заданной пары чисел  $a, b$  убедиться в справедливости равенства (1), которое, оставаясь на точке зрения Лейбница, отнюдь нельзя считать тавтологическим. Пожалуй, это равенство и было установлено путем индуктивного обобщения подобных численных результатов. Если же желательно доказать справедливость равенства (1) для любых  $a$  и  $b$ , то оказывается необходимым прибегнуть к особой уловке <sup>1)</sup>, безразлично, останемся ли мы при упомянутом представлении числа или же перейдем к более общей концепции, в которой понятие числа возникает от сравнения множеств посредством взаимного сопоставления их элементов. Во всяком случае соотношение (1) доказуемо и, следовательно, должно быть признано не аксиомой, а теоремой.

Что касается способа их применения, то, конечно, не только формулы (4) и (5), но и формулы (1), (2), (3) имеют значение аксиом. Они образуют правила, из которых выводятся известные соотношения, в свою очередь дающие начало новым формулам. Так, многократным применением правил, выражаемых формулами (1), (2), (3) и т. д., можно прийти к известному выражению для третьей степени бинoma  $a + b$ .

Для того чтобы выяснить истинную природу суждений, подобных приведенным выше в формулах (1)–(5), полезно не только рассмотреть происхождение и способ применения этих формул, но и провести сравнение их с законами, которыми оперирует прикладная математика: геометрия, механика и физика. Это сравнение позволит с большей легкостью установить, что именно следует считать эмпирическим законом, принципом, аксиомой, постулатом, гипотезой и что, с другой стороны, может быть выведено из последних и, стало быть, должно быть названо теоремой. Вместе с тем нужно, конечно, уяснить себе приемы подобных математических рассуждений, которые мы проиллюстрируем ниже хотя бы на нескольких элементарных примерах.

Прежде чем оставить область арифметики, напомним еще один закон, усмотреть который далеко не так легко, как равенства (1)–(5). Пусть  $p$  — простое число, больше 2. Так как  $p$  — нечетно, оно имеет или вид  $4n + 1$  или вид  $4n + 3$ . В первом случае простое число  $p$  может быть представлено в виде суммы двух квадратов, так что

$$p = x^2 + y^2.$$

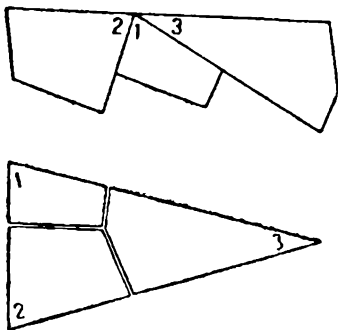
Это предложение, индуктивно открытое в XVIII столетии Ферма, было доказано только во второй половине XVIII столетия Эйлером.

<sup>1)</sup> Ср. книгу автора „Die mathematische Methode, 1924“, стр. 177.

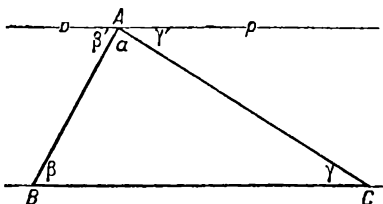
## 2. Аксиомы, теоремы и конструктивные понятия геометрии

Рассмотрим теперь теорему о сумме углов треугольника. Несмотря на все возражения, выставленные против возможности эмпирической проверки правильности этой теоремы, мы не склонны считать такую проверку неосуществимой. Разумеется, таким путем нельзя дать доказательства абсолютной точности теоремы. Грубое же доказательство теоремы можно осуществить уже простейшими средствами, например так, как это показано на фиг. 1 (бумажный треугольник разрезается на три части и последние прикладываются друг к другу рассматриваемыми углами). Вероятно, факт, выражаемый теоремой, сначала именно эмпирически наблюдался в различных случаях, и таким образом индуктивно была найдена теорема.

Мы можем, однако, этот „эмпирический закон суммы углов в треугольнике“ доказать теоретически, если воспользуемся введен-



Фиг. 1.



Фиг. 2.

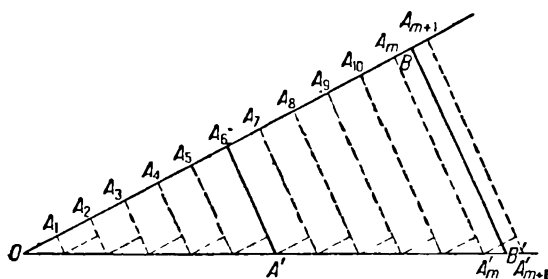
ными Эвклидом „началами“, которые мы в этом случае назовем аксиомами. Для доказательства через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  (фиг. 2) проводят, параллельно стороне  $BC$ , вспомогательную прямую  $p$  и рассматривают образовавшиеся углы с вершиной в  $A$ . Так как при этом  $\beta' = \beta$ , а  $\gamma' = \gamma$ , то ясно, что сумма углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  составляет два прямых угла. То обстоятельство, что через точку  $A$  можно провести указанную прямую  $p$  и что при этом имеют место указанные равенства между углами  $\beta$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma$ ,  $\gamma'$ , следует как раз из эвклидовых аксиом. Если можно считать последние безусловно справедливыми, то в силу нашего доказательства столь же справедливой нужно признать и рассмотренную теорему.

Рассмотрим еще одно конструктивное геометрическое понятие, а именно понятие пропорции. Чтобы сделать это понятие пригодным и в случае несоизмеримых отрезков, Эвдокс сформулировал его в следующих словах: „говорят, что  $a$  относится к  $b$ , как  $a'$  к  $b'$ , если любое кратное  $a$  будет больше, равно

или меньше по сравнению с любым кратным  $b$ , смотря по тому, будет ли соответствующее кратное  $a'$  больше, равно или меньше по сравнению с соответствующим кратным  $b'$ .

Если предположить уже известным теорию параллельных прямых и теоремы конгруэнтности, то теперь можно доказать теоремы о пропорциональных отрезках, образуемых на сторонах угла пересекающимися их параллельными прямыми. Пусть, например, пара параллельных прямых  $AA'$  и  $BB'$  (фиг. 3) пересекает два луча, исходящих из точки  $O$ . Разделим отрезок  $OA$  на равные части и представим себе, что такая часть отложена от точки вдоль прямой  $OB$  неограниченно далеко. Образованным таким образом на  $OB$  равноотстоящим точкам соответствуют, благодаря проходящим через них параллельным к  $AA'$  линиям, определенные точки прямой  $OB'$ , которые вследствие геометрических аксиом будут

расположены в том же порядке друг к другу и к точке  $B'$ , в каком равноотстоящие точки на  $OB$  расположены относительно друг друга и точки  $B$ . Соответствующие равноотстоящим точкам на  $OB$  точки  $OB'$  будут, в свою очередь, равноотстоящими, как это следует из равенства



Фиг. 3.

указанных на чертеже пунктиром треугольников и из соответствия, устанавливаемого посредством параллельных линий; мы заключаем, что на отдельных отрезках прямой  $OA'B'$  будет размещено столько же равноотстоящих точек, как и на соответствующих отрезках прямой  $OAB$ . Отсюда, после простого рассуждения, легко усмотреть то обстоятельство, которое, в силу принятого определения, означает, что  $OA'$  так относится к  $OB'$ , как  $OA$  к  $OB$ .

### 3. Архимедово доказательство закона рычага

Приведем теперь пример закона из механики, именно из области статики. Если к рычагу приложены две силы, то, как известно, действие каждой из них характеризуется произведением из величины этой силы на длину соответствующего ей плеча. Если силы направлены в противоположные стороны, а названные произведения — так называемые моменты — равны между собой, то силы находятся в равновесии. Этот закон бесчисленное число раз подтверждался наблюдениями, по всей вероятности, и был впервые найден из наблюдений индуктивным путем.

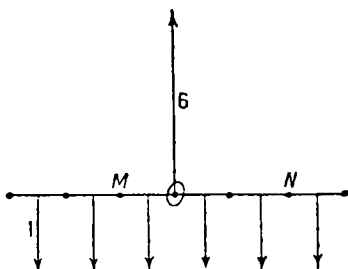
Но этот закон, как заметил Архимед, может быть выведен из более простых опытных данных. Для этой цели стоит только признать известными и безусловно справедливыми следующие принципы:

I. Две одинаковые по величине и по направлению силы, приложенные к твердому телу, могут быть уравновешены удвоенной силой того же направления, приложенной к середине отрезка, соединяющего точки приложения данных двух сил.

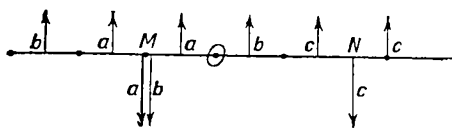
II. Наложение (совмещение) состояний равновесия приводит снова к состоянию равновесия.

III. Две приложенные к одной и той же точке силы эквивалентны их сумме, если они направлены в одну сторону и уничтожаются, если они равны и направлены в противоположные стороны.

Мы приведем доказательство закона рычага, следуя Архимеду,

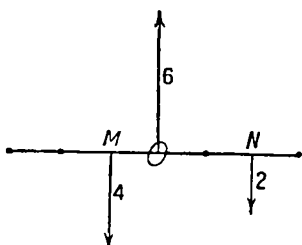


Фиг. 4.



Фиг. 5.

для одного простого примера. На фиг. 4 изображено состояние равновесия твердого стержня  $MN$ , к которому приложены шесть направленных вниз сил, величина каждой из которых равна 1, и одна направленная вверх сила величины 6; взаимное расположение этих сил указано на чертеже. В равновесии стержня мы убеждаемся, разлагая направленную вверх силу на три силы, величиною по две единицы, тогда каждая из последних сил находится в равновесии с парой направленных вниз сил, равноотстоящих от точки  $O$ , и наша фигура изображает положение трех состояний равновесия. На фиг. 5 также представлено некоторое состояние равновесия. Здесь все направленные вверх силы равны 1, направленные же вниз — 2. И здесь мы имеем наложение трех состояний равновесия, ибо силы, обозначенные через  $a$ , уравновешивают друг друга, равно как и силы  $b$  и  $c$ . Если наложить друг на друга фиг. 4 и 5, совместив горизонтальные стержни и точки  $O$ , то



Фиг. 6.

все единичные силы взаимно уничтожатся и останется состоя-

ние равновесия трех сил, из которых силы 4 и 2 направлены вниз, а сила 6 — вверх (фиг. 6).

Представив себе еще, что стержень в точке *O* вращательно закрепляется, вследствие чего сила 6 оказывается излишней, приходим окончательно к равновесию двух только сил — 4 и 2, моменты которых, очевидно, равны между собою.

Соответствующим обобщением этого метода можно было бы доказать закон рычага в общем виде <sup>1)</sup>.

#### 4. Сравнительные замечания и следствия

Последний пример показывает, что при известных обстоятельствах эмпирический закон может быть выведен из других опытных данных. Физика доставляет сколько угодно примеров этого рода. В геометрических доказательствах § 2 аксиомы Эвклида играют ту же роль, что в § 3 эмпирические принципы статики. Этим аксиомам, как необходимым, по его мнению, условиям созерцания, Кант стремился приписать особое гносеологическое значение. Аналогия с математическими рассматриваниями в механике и физике, а в особенности тот факт, что система геометрических аксиом также может быть видоизменена, подсказывают, по нашему мнению, мысль, что и эти аксиомы, в конце концов, эмпирического происхождения.

Если мы проследим теперь за ходом рассуждений в последних двух пунктах этой статьи, то мы всякий раз встретимся с некоторой конструкцией, облегчающей доказательство того или другого интересующего нас предложения. В § 2 такой конструкцией является особым образом проведенная вспомогательная прямая, позволяющая открыть новое свойство треугольника, или построения фиг. 3, приводящие к доказательству одной теоремы о пропорциях, понятие которых уже само представляет собою математическую конструкцию <sup>2)</sup>. В доказательстве закона рычага в § 3 налагаемые состояния равновесия дают пример более плотной конструкции, требующей известной доли изобретательности.

Рассмотренные только что области прикладной математики, к которой мы здесь причисляем и геометрию, отличаются от чистой математики, в частности от арифметики, только тем, что в них основной материал понятий, вместе с фундаментальными законами, поступает в сферу математического рассмотрения откуда либо „со стороны“. Этот материал приобретен посредством опыта в узком смысле этого слова, т. е. происходит не из наблюдений, сделанных, скажем, в процессе счета над числами, а из восприятия нашими чувствами предметов и явлений внешнего мира; этот материал образует фундамент прикладных

<sup>1)</sup> Ср. Маха („Die Mechanik in Entwicklung“ 8-е изд., стр. 12), который, впрочем, не признает доказательства Архимеда.

<sup>2)</sup> Подобные математические конструкции автор называет „синтетическими понятиями“.

математических наук, на котором воздвигаются затем те или иные математические конструкции. Напротив, арифметика имеет дело с чисто математическими конструкциями, как-то: установление некоторой последовательности элементов, составление каких-либо элементов операции (действие) над числами и т. д. (§ 1).

В обоих случаях из определения конструкций непосредственно вытекают известные соотношения, к которым постепенно приходится прибегать и которые являются ничем иным, как описанием этих конструкций. Таковы соотношения (4) и (5) в § 1, о которых еще Гельмгольц заметил, что они представляют собою лишь описание действий сложения и умножения. Но подобное соотношение, непосредственно представляющее конструкцию нового понятия, вряд ли было бы целесообразно называть аксиомой. Всякий применяемый в математике рекуррентный прием, всякий „алгоритм“ приводит подобным же образом к новому соотношению. Так за умножением следует возведение в степень, причем степень полностью определяется отношением:

$$a^{n+1} = a \cdot a^n. \quad (7)$$

Возможное число подобных соотношений простирается в бесконечность. Но так как арифметика исходит только из таких соотношений, которые описывают универсально конструкции понятий, то нам представляется правильным сказать, что арифметика вовсе не имеет аксиом.

Подобно тому, как в прикладной математике конструктивные понятия позволили открыть скрытые свойства известных понятий, мы бываем вынуждены конструировать новые понятия и в арифметике, с ее чисто конструктивно определенными понятиями, с целью выяснения (или доказательства) соотношений между старыми понятиями. Так, формулу (1) нельзя доказать в общем виде с помощью одного определения умножения, а нужно прибегнуть к особому приему, доставляющему новое конструктивное понятие. Особенно ясно подтверждает вышесказанное пример с теоремой Ферма, упомянутой в § 1. Как бы мы ни изменяли определение рассматриваемых понятий, мы никогда, исходя из этих понятий непосредственно, не придем к доказательству теоремы. Для приведения последнего Эйлер воспользовался новой конструкцией, состоящей из цепи приведений и преобразований.

## 5. К вопросу о доказательствах непротиворечивости арифметики

Как было показано выше, соотношения, принимаемые в арифметике без доказательства, как, например, равенства (4), (5) и (7), представляют собою всего лишь описание наших конструктивных понятий. Недавно появилось течение, стремящееся приписать построению арифметических понятий чисто „генетиче-

ское" значение и обосновать указанные соотношения, доказав, что формально (скажем, с помощью символического исчисления) выводимые из последних следствия никогда не придут в противоречие друг с другом. Но при попытках провести такое доказательство в общем виде неизбежно оказывается, как это и следовало ожидать, что при этом с символическими соотношениями связываются новые конструкции понятий, а последние снова приходится подвергать „генетическому“ рассмотрению, которое хотели избежать. Тогда как исследование принятых принципов на непротиворечивость, без сомнения, имеет смысл в дисциплинах прикладной математики, подобный прием обоснования исходных положений арифметики нам представляется излишним. По нашему мнению, единственно возможное обоснование арифметики заключается в последовательном построении ее понятий.

---



Решения нижеследующих задач предлагается присылать в редакцию по адресу: Москва, Центр, Б. Комсомольский пер., 6, Редакция „Математическое просвещение“.

Задачи № 128—132 были предложены в заключительном туре Московской математической олимпиады 1636 г. школьников 9-го и 10-го классов.

128. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}x + y &= a, \\ x^5 + y^5 &= b^5.\end{aligned}$$

129. Доказать, что если длины сторон прямоугольного треугольника выражаются целыми числами, то произведение чисел, выражающих длины катетов, делится на 12.

130. На плоскости дан угол, образованный лучами  $a$  и  $b$ . Из данной точки  $M$  провести прямую  $c$  так, чтобы треугольник, образованный лучами  $a$  и  $b$  и пересекающей их прямой  $c$ , имел периметр данной величины  $2p$ .

131. Сколькими различными способами число 1 000 000 можно представить в виде произведения трех целых чисел?

Представления, отличающиеся только порядком множителей, считаются тождественными.

132. Определить, сколько различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара.

133. Вычислить вероятность того, что при умножении на логарифмической линейке двух произвольных чисел движок будет выдвинут влево.

Г. Тревогин (Москва)

134. Отрезок  $AB$  разбивается двумя произвольно взятыми внутри отрезка точками  $M$  и  $N$  на три части. Определить вероятность того, что из трех полученных частей можно построить треугольник.

Агафонов (Москва)

135. Пользуясь формулой Стирлинга, доказать формулу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + kn)! (n^2 - kn)!}{[(n^2)!]^2} = e.$$

Б. Оксенов (Ленинград)

136. Доказать, что суммы

$$1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2! \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3! \cdot 3} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4! \cdot 4} + \dots$$

и

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$$

равны между собой при любом целом  $n$ .

Б. Оксенов (Ленинград)

137. Пользуясь известным рядом  $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$  доказать, что  $\frac{\pi^2}{8} = \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7^2}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11^2}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13^2}{12 \cdot 14} \cdot \frac{17^2}{16 \cdot 18} - \dots$ , где числители — квадраты последовательных простых чисел.

138. Доказать, что отрезки каждой из параллельных хорд  $A_i B_i$  гиперболы, пересекающихся с асимптотой в точках  $C_i$  обладают следующим свойством  $A_i C_i \cdot B_i C_i$  одинаково для всех параллельных хорд.

М. Шайкевич (Лосиноостровск)

139. Доказать, что геометрическое место проекций точек пересечения касательных к эллипсу с его малой осью на радиус-вектор точки касания есть окружность с центром в фокусе и радиусом, равным большой полуоси.

М. Черняев (Ростов-на-Дону)

140. На отрезке  $AB$  или вне его выбирается произвольная точка  $M$ ; на отрезках  $AM$  и  $BM$  строятся квадраты — с одной стороны отрезка  $AB$ , если точка  $M$  взята внутри отрезка и с обеих сторон в противном случае. Центры обоих квадратов соединяются прямой. Найти огибающую семейства этих прямых.

М. Черняев (Ростов-на-Дону)

# Решения задач

81. Взяты две хорды равнобочной гиперболы; через середину каждой из этих хорд проведена прямая, параллельная другой хорде. Доказать, что точка пересечения этих прямых, середины хорд и центр гиперболы лежат на одной окружности.

М. Черняев (Ростов-на-Дону)

Соединим точку  $O$  (центр гиперболы) с точками  $M$  и  $N$  (середины хорд). Обозначим угловые коэффициенты хорд  $AB$  и  $CD$  соответственно через  $k_1$  и  $k_2$ .

Прямые  $OM$  и  $ON$  являются диаметрами гиперболы, сопряженными хордам  $AB$  и  $CD$ ; следовательно угловые коэффициенты  $OM$  и  $ON$  равны  $\frac{1}{k_1}$  и  $\frac{1}{k_2}$ ; прямые  $MP$  и  $NP$  имеют угловые коэффициенты  $k_2$  и  $k_1$ , вследствие их параллельности прямым  $CD$  и  $AB$ .

Вместо того, чтобы доказывать, что точки  $O, M, N, P$  лежат на одной окружности, мы будем доказывать, что

$$\angle NOM + \angle MPN = 180^\circ, \quad \angle PNO + \angle OMP = 180^\circ,$$

или, что то же самое, равенство углов

$$(\widehat{NO}, \widehat{MO}) = (\widehat{MP}, \widehat{NP}); \quad (\widehat{PN}, \widehat{ON}) = (\widehat{OM}, \widehat{PM})$$

(следует принимать во внимание знаки углов).

Имеем:

$$\operatorname{tg}(\widehat{NO}, \widehat{MO}) = \frac{\left(-\frac{1}{k_1}\right) - \left(-\frac{1}{k_2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{k_1}\right)\left(-\frac{1}{k_2}\right)} = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{MP}, \widehat{ON}) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{PN}, \widehat{ON}) = \frac{(-k_1) - \left(\frac{1}{k_2}\right)}{1 + (-k_1)\left(\frac{1}{k_2}\right)} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

$$\operatorname{tg}(\widehat{OM}, \widehat{PM}) = \frac{\frac{1}{k_1} - (-k_2)}{1 + \left(\frac{1}{k_1}\right)(-k_2)} = \frac{1 + k_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

откуда и следуют равенства указанных углов.

82. Доказать, что всякая равнобочная гипербола, проходящая через три данные точки  $A, B, C$ , проходит также и через точку пересечения высот треугольника  $ABC$ .

М. Шайкевич (Лосиноостровск)

Составим уравнения двух высот треугольника  $ABC$ , найдем координаты точки их пересечения и, подставив в уравнение гиперболы, убедимся, что гипербола проходит через эту точку.

С. Горолов (Ленинград)

83. Из уравнения

$$\int_0^{\infty} e^{-u} u^{x+z} du \int_0^{\infty} e^{-u} u^{y+z} du = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x+y} du$$

определить целые положительные  $x, y$  и  $z$ .

А. В. (Москва)

Заменяя гамма-функции, входящие в предложенное уравнение, по известной формуле, получим:  $(x+z)!(y+z)! = (x+y)!$  Автор задачи дает способ получения частных целочисленных решений этого уравнения.

Положим (при  $n$  — целом)

$$x+z=2n+1, \quad (1)$$

$$y+z=(2n+1)!-1. \quad (2)$$

Тогда

$$(x+y)! = (x+z)!(y+z)! = [(2n+1)!]!,$$

ибо

$$(2n+1)![(2n+1)!-1]! = [(2n+1)!]!.$$

Значит

$$x+y=(2n+1)!. \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) найдем:

$$x=n+1; \quad y=(2n+1)!-n-1; \quad z=n.$$

85. Найти такие целые и взаимно простые числа  $a$  и  $b$ , чтобы

$$\text{было: } \frac{a+b}{a^2-ab+b^2} = \frac{8}{73}.$$

Если  $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$  — несократимая дробь, то  $a+b=8$  и  $a^2-ab+b^2=73$ .

откуда  $64-3ab=73$ , что невозможно при целых  $a$  и  $b$ .

Значит дробь  $\frac{a+b}{a^2-ab+b^2}$  сократима на некоторое число  $k$ . Это число  $k$  является делителем числа  $(a+b)$ , следовательно оно является также делителем числа  $(a+b)^2$ . Знаменатель, равный  $(a+b)^2-3ab$  также делится на число  $k$ ; отсюда следует, что  $3ab$  делится на  $k$ . Но  $ab$  не может делиться на  $k$  или иметь с ним общих делителей, ибо тогда  $ab$  имело бы общих делителей с числителем дроби  $a+b$ , что при взаимно простых  $a$  и  $b$  невозможно. Итак, из того, что  $3ab$  делится на  $k$ , следует, что  $k$  равно либо 1, либо 3. Но случай  $k=1$  (несократимая дробь) уже разобран нами и найден невозможным. Остается предположить  $k=3$ . Тогда  $a+b=3 \cdot 8=24$  и  $a^2-ab+b^2=3 \cdot 73=219$ . Решая совместно эти два уравнения, найдем  $a=7, b=17$ .

86. Найти пятизначное число, превосходящее в 45 раз произведение его цифр.

Обозначим цифры искомого числа буквами  $a, b, c, d$  и  $e$ . Ни одна из этих цифр не может равняться нулю, ибо тогда все число, равное по условию  $45abcde$  равнялось бы нулю. Отсюда следует, что все цифры  $a, b, c, d$  и  $e$  нечетны, ибо в противном случае произведение  $45abcde$  оканчивалось бы нулем, т. е. было бы  $e=0$ .

Итак  $abcde$  — нечетно. Значит  $45abcde$  оканчивается цифрой 5:  $e=5$ . Искомое число равно  $45abcd \cdot 5 = 225abcd = 25 \cdot 9abcd$ . Но  $9abcd$  — число нечетное,

а произведение числа 25 на нечетное число всегда оканчивается на 25 или на 75; в первом случае было бы  $d=2$ , что невозможно, так как  $d$  нечетно. Следовательно  $d=7$  и искомое число равно  $225\ abc \cdot 7 = 1575\ abc$ .

Искомое число пятизначно, следовательно  $1575\ abc < 100\ 000$ , или  $abc = \frac{100\ 000}{1575}$ ; а так как  $abc$  число целое, то  $abc < 63$ .

Далее заметим, что наше число, равное  $1575\ abc$ , должно делиться на 9; значит сумма цифр  $a + b + c + 7 + 5$  делится на 9. Отсюда следует, что сумма  $a + b + c$  дает при делении на 9 в остатке 6. Но сумма трех нечетных чисел  $a, b, c$  нечетна и может равняться по предыдущему лишь 15, 33, 51 и т. д. Но  $a, b, c$  — цифры, и  $a + b + c \leq 27$ , значит  $a + b + c = 15$ . Последнее равенство имеет следующие целые нечетные решения: 1, 5, 9; 1, 7, 7; 3, 3, 9; 3, 5, 7 и 5, 5, 5. Из этих решений только первые два удовлетворяют условию  $abc \leq 63$ . В первом случае имеем  $abc = 1 \cdot 5 \cdot 9 = 45$ ; искомое число равно  $45 \cdot 1575 = 70\ 875$ . Во втором случае имеем  $abc = 1 \cdot 7 \cdot 7 = 49$ ; искомое число равно  $49 \cdot 1575 = 77\ 175$ . Первый случай придется отбросить, ибо число 70 875 содержит цифру нуль. Второй случай дает единственное решение нашей задачи: число 77 175.

86. Найти две правильные несократимые дроби, произведение которых равно  $\frac{19}{23}$ , зная, что числителями и знаменателями этих дробей служат четыре различных числа, дающие в сумме 808.

Пусть искомые дроби равны  $\frac{x}{y}$  и  $\frac{x'}{y'}$ . Имеем  $\frac{xx'}{yy'} = \frac{19}{23}$ . Так как числа 19 и 23 — простые, то либо  $x$ , либо  $x'$  должно делиться на 19 и либо  $y$ , либо  $y'$  должно делиться на 23.

1. Пусть числитель  $x$  и знаменатель  $y$  одной и той же дроби (например первой) делятся соответственно на 19 и на 23, т. е.  $x = 19a$  и  $y = 23b$  ( $a$  и  $b$  — взаимно простые). Из равенства  $\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{19}{23}$  следует:  $\frac{x'}{y'} = \frac{b}{a}$ . Дроби  $\frac{x'}{y'}$  и  $\frac{b}{a}$  несократимы и равны между собой, поэтому  $x' = b$  и  $y' = a$ .

По условию  $x + y + x' + y' = 808$ , т. е.  $19a + 23b + a + b = 808$ , или  $5a + 6b = 202$ , откуда  $a = \frac{202 - 6b}{5}$ .

Дроби  $\frac{x}{y}$  и  $\frac{x'}{y'}$  — правильные, т. е.  $19a < 23b$  и  $b < a$ , откуда

$$19 \cdot \frac{202 - 6b}{5} < 23b \quad \text{и} \quad b < \frac{202 - 6b}{5}.$$

или

$$b > \frac{3838}{229} \quad \text{и} \quad b < \frac{202}{11},$$

т. е.  $b \geq 17$  и  $b \leq 18$ .

Таким образом возможны только два значения для  $b$ :  $b = 17$  и  $b = 18$ . При  $b = 17$ , имеем  $a = 20$ ,  $x = 19 \cdot 20 = 380$ ,  $y = 23 \cdot 17 = 391$ ,  $x' = 17$ ,  $y' = 20$ . При  $b = 18$  для  $a$  получается не целое значение, что невозможно. Итак, искомые дроби равны  $\frac{380}{391}$  и  $\frac{17}{20}$ .

2. Положим теперь, что числитель одной (например первой) и знаменатель другой (например второй) дроби делятся соответственно на 19 и на 23, т. е. положим  $x = 19a$  и  $y' = 23b$ . Имеем:  $\frac{x}{y} \cdot \frac{x'}{y'} = \frac{19ax'}{23by} = \frac{19}{23}$ , откуда  $\frac{ax'}{by} = 1$ ,

или  $\frac{a}{y} = \frac{b}{x'}$ .

Дробь  $\frac{a}{y}$  несократима, ибо несократимая дробь  $\frac{19a}{y} = \frac{x}{y}$ ; по той же причине несократима и дробь  $\frac{b}{x'}$ . Несократимые дроби  $\frac{a}{y}$  и  $\frac{b}{x'}$  равны между собой, следовательно  $a = b$  и  $x' = y$ . Но по условию задачи  $x' \neq y$ , ибо числители и знаменатели дробей должны быть различны, и, следовательно, рассматриваемый случай решений не дает.

Заметим здесь же, что указание на то, что числа  $x$ ,  $y$  и  $x'$ ,  $y'$  должны быть различными, можно было бы не делать, ибо, в самом деле, в рассматриваемом нами случае  $x = 19a$ ,  $x' = y$ ,  $y' = 23b - 23a$  (ибо  $b = a$ ) и искомые дроби имеют вид  $\frac{19a}{x'}$  и  $\frac{x'}{23a}$ . По условию задачи должно быть  $19a + x' + x' + 3a = 808$ .

откуда  $21a + x = 404$ ;  $x' = 404 - 21a$ . Дроби  $\frac{19a}{x'}$  и  $\frac{x'}{23a}$  — правильные, т. е.  $19a < x'$  и  $x' < 23a$ , или  $19a < 404 - 21a$  и  $404 - 21a < 23a$ ; эти неравенства дают  $a \leq 10$  и  $a \geq 10$ . Итак  $a = 10$ .

При  $a = 10$ ,  $x' = 194$  и дробь  $\frac{x'}{y'} = \frac{x'}{23a} = \frac{194}{230}$  будет сократимой, что противоречит условию задачи. Итак, дроби  $\frac{380}{391}$  и  $\frac{17}{20}$  составляют единственное решение данной задачи.

87. Два курьера одновременно выходят навстречу друг другу из пунктов А и В. Если бы первый вышел на час раньше, а второй на полчаса позже, они встретились бы на 18 минут раньше. Если бы первый вышел на полчаса позже, а второй на час раньше, то место их встречи передвинулось бы на 5600 м. Какова скорость каждого курьера?

В первом случае первый курьер вышел на 1 час раньше обычного, а пришел к месту встречи на 18 мин. = 0,3 часа раньше обычного, т. е. он находился в пути до момента встречи на  $1 - 0,3 = 0,7$  часа дольше, чем обычно. Второй курьер вышел на 0,5 часа позднее обычного, а пришел к месту встречи на 0,3 часа позднее обычного, следовательно он находился в пути на  $0,5 + 0,3 = 0,8$  часа меньше времени чем обычно. За эти 0,7 часа первый курьер прошел от места их встречи в этом случае до места их обычной встречи, а второй курьер мог бы за эти 0,8 часа пройти это же расстояние. Это значит, что скорости курьеров обратно пропорциональны числам 0,7 и 0,8, т. е.

$$v : v' = \frac{0,8}{0,7}, \quad \text{или} \quad \frac{v}{v'} = \frac{8}{7}.$$

Место обычной встречи делит весь путь АВ в отношении  $v : v'$ , следовательно расположено на расстоянии  $\frac{vs}{v + v'}$  от А (здесь  $s$  — расстояние между А и В).

Во втором случае курьер выходит из В на 1,5 часа раньше, чем курьер из А. Следовательно, к моменту выхода курьера из А расстояние между курьерами составляло  $(s - 1,5v')$  метров. Место их встречи снова делит это расстояние в отношении  $v$  к  $v'$  и, следовательно, расположено на расстоянии  $\frac{v(s - 1,5v')}{v + v'}$  от А.

Расстояние между точками их встречи во втором случае и обычно составляет

$$\frac{vs}{v + v'} - \frac{v(s - 1,5v')}{v + v'} = \frac{1,5vv'}{v + v'} = \frac{1,5v}{1 + \frac{v}{v'}}$$

и равно, по условию, 5600 м. Имеем, следовательно:

$$\frac{1,5v}{1 + \frac{v}{v'}} = 5600.$$

Но  $\frac{v}{v'} = \frac{8}{7}$  Подставив, найдем:

$$\frac{7v}{10} = 5600; v = 8000 \frac{\text{м}}{\text{час}}, \quad v' = \frac{7v}{8} = 7000 \frac{\text{м}}{\text{час}}.$$

88. Ряд последовательных нечетных чисел (начиная с 1) разбивают на группы  $\underbrace{1}_{\text{I}}; \underbrace{3+5}_{\text{II}}; \underbrace{7+9+11}_{\text{III}}; \dots$  так, чтобы число

членов каждой группы равнялось ее номеру.

1. Какова сумма членов группы с номером  $n$ .

2. Пользуясь полученным результатом, найти чему равна сумма кубов  $n$  первых чисел натурального ряда.

Число членов первых  $n$  групп, очевидно, равно  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Сумма всех членов первых  $n$  групп есть сумма  $\frac{n(n+1)}{2}$  последовательных нечетных чисел и равна

$$S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \left[ 1 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - 1 \right] = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Подставив вместо  $n$  число  $(n-1)$ , получим сумму членов  $(n-1)$ -й груп

$$S_{n-1} = \frac{n^2(n-1)^2}{4}.$$

Сумма членов  $n$ -й группы, очевидно, равна

$$s_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = n^4.$$

Итак, сумма членов каждой группы равна кубу ее номера.

Отсюда следует, что сумма кубов  $n$  первых членов натурального ряда равна  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ , т. е. квадрату суммы первых степеней тех же чисел.

89. 1. Доказать, что дробь  $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$  несократима, если  $a$  и  $b$  — целые и взаимно простые числа.

2. *Приложение.* Определить два числа, зная что их общее наименьшее кратное равно 360, а сумма их квадратов равна 5409.

1. Всякий делитель числителя должен быть делителем либо  $a$ , либо  $b$ . Делитель  $a$  является также делителем  $a^2$  и не может быть делителем  $b^2$  (ибо  $a$  и  $b$  — взаимно простые), а, значит, не может быть делителем суммы  $a^2 + b^2$ , т. е. числитель и знаменатель рассматриваемой дроби не имеют общих делителей.

2. Обозначим общий наибольший делитель искоемых чисел буквой  $D$ ; тогда искомые числа имеют вид  $Da$  и  $Db$ , где  $a$  и  $b$  — взаимно простые.

Общее наименьшее кратное этих чисел равно  $Dab = 360$ ;  $D^2a^2 + D^2b^2 = 5409$ .

Отсюда  $\frac{D^2a^2b^2}{D^2(a^2+b^2)} = \frac{129600}{5409}$ , или

$$\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{14400}{601}.$$

Дробь слева несократима по предыдущему; дробь справа тоже несократима. Из равенства двух несократимых дробей следует:  $a^2b^2 = 14400$  и  $a^2 + b^2 = 601$ , или  $ab = 120$ ,  $(a+b)^2 = 601 + 240 = 841$ , откуда  $a+b = 29$ . Решив полученную систему уравнений, найдем  $a = 5$ ,  $b = 24$ . Далее, из  $Dab = 360$ , получим  $D = 3$ , и, следовательно, искомые числа  $Da$  и  $Db$  равны 15 и 72.

90. Найти дробь, равную  $\frac{399}{1064}$ , зная, что сумма ее числителя и знаменателя составляет куб простого числа.

Сократив дробь, получим  $\frac{399}{1064} = \frac{3}{8}$ . Сумма числителя и знаменателя этой дроби равна 11. На какое бы число мы ни умножали теперь числителя и знаменателя дроби, сумма числителя и знаменателя будет делиться на 11. Для того чтобы эта сумма была точным кубом, достаточно помножить числитель и знаменатель на  $11^2 = 121$ . Итак, дробь  $\frac{363}{968}$  есть решение нашей задачи, и притом единственное.

91. Пешеход идет со скоростью 5 км/час, останавливаясь на отдых через каждые 4 км. Продолжительность каждой остановки, кроме четвертой — 10 мин. Четвертая остановка — 1 час. Какое расстояние прошел пешеход, если отправившись в путь в 4 часа утра, он пришел на место к полудню.

Пешеход находится в пути 8 часов. Из них 50 минут — дополнительный отдых во время четвертой остановки. Следовательно, на движение и 10-минутные остановки он затратил 7 час. 10 мин. = 430 мин. Остановки следовали через каждые 4 км, т. е. через каждые 46 мин.  $\left(\frac{4}{5} \text{ часа}\right)$  и продолжались

10 мин.; каждый „период“ (ходьба и отдых) продолжался, таким образом, 58 мин. Число таких периодов получится делением 430 на 58. Получаем 7 в частном и 24 в остатке. За 7 периодов пешеход прошел 28 км, а за последние 24 мин. он прошел 2 км. Всего пешеход прошел 30 км.

92. При умножении числа 683 на трехзначный множитель получилось 56006. Этот результат явно неверен (почему?).

Выяснилось, что ошибка произошла оттого, что последнее частное произведение (множимого 683 на цифру сотен множителя) по ошибке подписали непосредственно под предпоследним (вторым) частным произведением.

Найти множитель, зная, что цифра его сотен на 2 превосходит цифру десятков. Можно ли найти ошибку, не вычисляя истинного произведения?

Полученный результат явно неверен, ибо он меньше 68 300, т. е. произведения числа 683 на 100, которое является наименьшим из трехзначных чисел.

Цифра единиц множителя, очевидно, есть 2, ибо цифра единиц произведения равна 6. Обозначим цифру десятков множителя буквой  $x$ , а цифру сотен  $(x + 2)$ . Ошибка при умножении привела к тому, что вместо множителя  $100(x + 2) + 10x + 2$  был фактически взят множитель  $10(x + 2) + 10x + 2 = 20x + 22$ , т. е.  $683(20x + 22) = 56006$ . Отсюда  $x = 3$ . Множитель равен 532.

Ошибка равна  $(500 - 50) \cdot 683 = 307350$ .

93. Найти четырехзначное число вида  $aabb$ , зная, что оно — точный квадрат.

Искомое число  $1100a + 11b$  очевидно делится на 11. Так как оно — точный квадрат, оно должно делиться на  $11^2$ . Разделив это число на 11, получим  $100a + b$ , число, делящееся на 11. Но  $100a + b = 99a + (a + b)$ , откуда следует, что  $(a + b)$  должно делиться на 11. Но  $a < 10$  и  $b < 10$ , следовательно  $a + b = 11$ . Разделив  $99a + (a + b)$  снова на 11, получим  $9a + 1$  (ибо  $a + b = 11$ ). Это частное  $(9a + 1)$  должно быть точным квадратом, ибо из искомого числа мы исключили множитель  $11^2$ .

Легко убедиться, что вид  $9a + 1$  могут иметь лишь квадраты чисел вида  $9k \pm 1$ , т. е. числа 8, 10, 17, 19 и т. д. Тогда  $a$  может иметь значения 7, 11, 32, 40 и т. д.; но  $a \leq 9$ , значит  $a = 7$ . При  $a = 7$ ,  $b = 4$ , и мы получаем только одно число, удовлетворяющее условиям задачи:  $7744 = 88^2$ .

94. Рассмотрим арифметическую и геометрическую прогрессии, удовлетворяющие следующим условиям:

1. Первые члены обеих прогрессий одинаковы.

2. Сумма двух членов арифметической прогрессии превышает сумму первых двух членов геометрической на величину, равную утроенному первому члену.

3. Сумма первых трех членов арифметической прогрессии равна сумме первых трех членов геометрической прогрессии.

Вычислить знаменатель геометрической прогрессии.

Искомые прогрессии: арифметическая  $a, a + d, a + 2d, \dots$ ; геометрическая  $a, aq, aq^2, \dots$ . По условиям задачи:

$$1) 2a + d = a + aq + 3a, \text{ или } d - 2a = aq;$$

$$2) 3a + 3d = a + aq + aq^2, \text{ или } 3d + 2a = aq + aq^2.$$

Исключив  $d$  и сократив на  $a$ , получим:

$$q^2 - 2q - 8 = 0.$$

Отсюда  $q_1 = 4$ ;  $q_2 = -2$ . Так как  $d = aq + 2a$ , то  $d_1 = 6a$ ;  $d_2 = 0$ .

Прогрессии имеют вид: арифметическая  $a, 7a, 13a, \dots$ ; геометрическая  $a, 4a, 8a, \dots$ . Или арифметическая  $a, a, a, \dots$ ; геометрическая  $a, -2a, 4a, \dots$ .

95. 1. Найти общий вид полинома третьей степени, дающего при делении на  $x - 1$  в остатке 3, а при делении на  $x - 2$  в остатке 2. Какой остаток получится при делении этого полинома на произведение  $(x - 1)(x - 2)$ ?

2. Определить частный вид этого полинома, имеющий минимум равный  $-1$  при  $x = -1$ . Построить график этого полинома и установить центр симметрии.

1. Обозначим остаток от деления искомого многочлена  $P(x)$  на  $(x - 1)(x - 2)$  буквой  $r$ :  $P(x) = A(x - 1)(x - 2) + r$  (1). Здесь  $A$  и  $r$  линейные двучлены. По условию  $P(x)$  дает при делении на  $(x - 2)$  остаток 3, а при делении на  $(x - 1)$  остаток 2. Первый член в выражении (1) делится и на  $(x - 1)$ , и на  $(x - 2)$  без остатка, следовательно упомянутые остатки дает  $r$ . Итак,  $r = a(x - 1) + 3 = b(x - r) + 2$ . Отсюда  $(a - b)x - (a - 2b - 1) = 0$ .

Последнее равенство — тождество, значит коэффициенты бинома, стоящего в левой части, равны нулю:  $a - b = 0$  и  $a - 2b - 1 = 0$ . Из этих уравнений найдем  $a = b = -1$ . Итак,  $r = -1(x - 1) + 3 = 4 - x$ .

Обозначив линейный многочлен  $A$  через  $px + q$ , получим

$$P(x) = (px + q)(x - 1)(x - 2) + 4 - x =$$

$$= px^3 + (q - 3p)x^2 + (2p - 3q - 1)x + 2q + 4 = 0.$$

2. Условие  $P(-1) = -1$  дает:  $p - q = 1$ . Условие  $P'(x) = 0$  (условие минимума) дает:  $11p - 5q = 1$ . Подставляя сюда  $p = q + 1$ , найдем  $q = \frac{5}{3}$  и  $p = \frac{2}{3}$ .

Таким образом  $P(x)$ , удовлетворяющий нашим дополнительным условиям, имеет вид

$$P(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}.$$



## УКАЗАТЕЛЬ КНИГ И СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ ЗА ПЕРИОД С 1/I ПО 1/VII 1935 г.

Настоящий список составлен на тех же основаниях, как и предыдущие. Там, где место издания и год издания опущены, подразумеваются: М.-Л. и 1935 г. Введены следующие сокращения:

- А. — „Архив истории науки и техники“.
- И. Т. — „Известия научно-исследовательского института механики и математики при Томском университете“.
- М. П. — „Математическое просвещение“. Сборник.
- М. С. — „Математический сборник“.
- М. Ф. — „Математика и физика в средней школе“.
- Н. — „Научные записки Харьковского механико-математического института“.
- Н. Ж. — „Наука и жизнь“.
- П. З. М. — „Под знаменем марксизма“.
- С. — „Социалистическая реконструкция и наука“.
- У. Р. — „Ученые записки Ростовского государственного университета“.
- У. С. — „Ученые записки Саратовского государственного университета“.
- Ф. Н. Т. — „Фронт науки и техники“.

В списке, при каждом отделе, указаны номера задач, помещенных в русских периодических изданиях.

### О с н о в ы м а т е м а т и к и

- Молодой В., О происхождении и значении аксиом геометрии, П. З. М., 3.
- Яновская С., Современные течения в буржуазной философии математики, Ф. Н. Т., 3.
- Озглядах Брауера и Гильберта.

### И с т о р и я м а т е м а т и к и

Лурье С. Я., Теория бесконечно малых у древних атомистов. Изд. Академии наук.

Содержание: Предшественники атомистической математики. Демокрит. Атомистическая философия математики. Дальнейшие судьбы математики атомизма в древности. Указатели.

Люстерник Л., Сегал Б., Итоги II Всесоюзного математического съезда, П. З. М., 1.

Постановления II Всесоюзного математического съезда, М. П., 3.

Чистяков И. И., Математическая олимпиада Ленинградского государственного университета им. А. С. Бубнова, М. П., 3.

Эйгес А., Институт математики и механики, Ф. Н. Т., 3.

### А л г е б р а

Аршон С. Е., Доказательство существования  $n$ -значных бесконечных ассиметрических последовательностей, М. П., 1934, 2. Автор приводит решение проблемы, поставленной А. Я. Хинчиным, и дает метод построения указанных последовательностей.

Аршон С. Е., Обобщение правила Саррюса, М. С., 42:1.

Бончковский Р. Н., Простейший способ вычисления логарифмов, М. Ф., 3. Изложение способа Саррюса вычисления логарифмов, основанного на двоичной системе числения.

Бружечка В. Ф., Об одном неравенстве для полиномов, Н. I.

Греллинг К., Теория множеств. Перевод с немецкого В. И. Контовта. Содержание: Исторические сведения. Основные понятия. Мощность. Конечные и бесконечные множества. Счетные и несчетные множества. Порядок и порядковое число. Антиномии теории множеств. Список литературы.

Креер Л. И., Алгебраические числа и решение геометрических задач на построение с помощью линейки и циркуля, М. П., 3. Понятие о числовом корпусе. Примеры. Задачи об удвоении куба, трисекции угла, построение правильного семиугольника.

Сапунов П. И., Некоторые упрощения при решении иррациональных уравнений, содержащих квадратные радикалы, М. П., 1934, 2.

Содержание: Освобождение уравнения от радикалов. Вывод формул для суммы и произведения корней резольвенты иррационального уравнения. Решение иррационального уравнения вида:  $\sqrt{a_1x + b_1} \pm \sqrt{a_2x + b_2} = \pm \sqrt{a_3x + b_3}$ . Преобразование иррационального уравнения.

Скворцов В. В., О решении уравнений, приводимых к однородным. М. П., 3. Автор дает способ решения посредством исключения свободных членов.

Чистяков И. И., Замечание к отделу о квадратных уравнениях, М. П., 3, Автор выводит условия рациональности корней квадратного уравнения.

#### *Задачи.*

М. П., 2, № 29, 30, 36, 37, 38, 47, 48.

М. П., 3, № 51, 52, 58, 60, 68.

М. Ф., 1, № 1, 2, 3, 13.

М. Ф., 2, № 1, 4, 5, 6.

М. Ф., 3, № 7, 8.

### Арифметика

Литцман В., Великаны и карлики в мире чисел. Перевод с немецкого Б. Д. Каминского, 2-е изд. Содержание: Счет. Числовая система. Счетные машины. Наглядное представление больших чисел с помощью мер длины и времени. Кое-что о вычислениях с большими числами. Наибольшее число, какое можно написать тремя цифрами. Числа простые и составные. Еще несколько примеров числовых великанов. Числовые карлики. Наглядное представление чисел посредством площадей и объемов. Почему в мире великанов и карликов вычисляют обыкновенными числами. Добавление редактора о сравнении роста факториалов и степеней с иллюстрациями, чертежами и таблицами.

*Задачи:* М. Ф., 3, № 3, 4.

### Теория чисел

Гребенча М. К., Решение неопределенных уравнений 1-й степени, М. Ф., 1.

Креер Л., Неопределенные уравнения, М. Ф., 3. Содержание: Неопределенные уравнения 1-й и 2-й степени. Задачи (8). Теорема об однородном неопределенном уравнении 2-й степени. Рациональные треугольники. Примеры из планиметрии и стереометрии.

Романов Н. П., К проблеме Гольдбаха, И. Т., 1, в. 1. Упрощение результата Шнирельмана: каждое достаточно большое число может быть разложено на сумму не менее чем 1104 простых слагаемых.

Чудаков Н. Г., Заметка о распределении простых чисел, У. С., т. 13, в. 1. Автор доказывает теорему: если  $a, aq, \dots, aq^n$ , где  $q > 1$ , произвольная возрастающая геометрическая прогрессия, то, начиная с достаточно большого  $n$ , между произвольной парой соседних членов прогрессии находится хотя бы одно простое число.

Эрдеш П. и Туран П., Об одной теореме из теории чисел, И. Т., т. 1, в. 1. Доказывается, что ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kl(k)^{\epsilon}}$ , где  $l(k)$  — наименьшее из чисел  $m$ , удовлетворяющих сравнению:  $a^m \equiv 1 \pmod{k}$ , сходится при произвольном  $k > 0$ .

#### Задачи.

М. П., 2, № 26, 27, 28, 39.

М. Ф., 1, № 4, 14.

М. Ф., 2, № 18.

М. Ф., 3, № 2.

Н. Ж., 2, № 2, 3, 6.

#### Анализ

Агамалов А. С., Об одном частном приеме интегрирования, М. П., 3. Автор приводит формулу интегрирования посредством предварительного дифференцирования и дает примеры ее приложения.

Гард Г., Интегрирование элементарных функций. Перевод с английского Д. А. Райкова. Содержание: Введение. Элементарные функции и их классификация. Интегрирование элементарных функций. Перечень основных результатов. Интегрирование рациональных функций. Метод Эрмита. Интегрирование алгебраических функций. Плоские уникарсальные кривые и пространственные. Трансцендентность функций. Принцип Лапласа. Эллиптические и псевдоэллиптические интегралы. Биномиальные интегралы. Плоские кривые 3-го порядка. О вырожденных абелевых интегралах. Классификация эллиптических интегралов. Интегрирование трансцендентных функций. Общая теорема Лиувилля. Библиография (25 названий). О доказательстве Абеля.

Грошев А. В., О сравнительной силе простейших признаков сходимости рядов, М. П., 3. Автор рассматривает признаки сходимости: олин — Даламбера и два — Коши, и доказывает для некоторых случаев преимущество признака Коши, а также преимущество логарифмического признака Коши над обыкновенным его признаком.

Гурса Э., Курс математического анализа, т. III, ч. 2, 1934. Содержание: Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. В конце находится общий указатель ко всем шести частям курса.

Крылов А. Н., Лекции о приближенных вычислениях, 3 изд. 542 стр.

Люстерник Л. А., Формула Стирлинга, М. П., 3.

Перепелкин Д. И., Геометрическая теория гиперболических функций, М. П., 2. Содержание: Определение гиперболических функций. Теорема сложения. Вывод аналитического выражения гиперболических функций и их свойств. Связь с теорией аффинных преобразований.

Чудаков Н. Г., Элементарное доказательство трансцендентности показательной и тригонометрической функций, М. П., 2. Доказательство для  $e^x$  и  $\sin x$ .

#### Задачи.

М. П., 2, № 41, 42, 43, 44, 45.

М. П., 3, № 53, 55, 56, 65, 66, 69, 71, 73.

М. Ф., 2, № 2, 3, 19, 20.

М. Ф., 3, № 6, 9.

#### Теория вероятностей\*

Черкасов Б. Н., Теория вероятностей в применении к телефонии, 100 стр.

#### Геометрия

Александров П. С. и В. А. Ефремович, О простейших понятиях современной топологии. Содержание: Топология поверхностей. Метрическое и качественное в геометрии. Элементарные поверхности. Односторонние поверхности. Внутренние и внешние свойства. Гомеоморфизм и изотопия. Дву-

сторонности и ориентируемость. Многообразия. Идеальные элементы. Абстрактные геометрии. Топология проективной плоскости. Замкнутые неориентируемые поверхности. Трехмерные замкнутые многообразия. Топологическое произведение. Некоторые математические многообразия. Топологические пространства. Примеры метрических пространств. 23 рисунка и чертежа, портреты Пуанкаре и П. С. Урысона.

Александров П. С., Предмет и метод топологии, С., 4—5.

Березовский Б. Я., Тригонометрические функции суммы и разности двух углов, М. П., 3. Новый вывод формулы  $\sin(\alpha + \beta)$ .

Богомолов С. А., Разбиение выпуклого многоугольника на треугольники с помощью диагоналей, М. П., 2. Автор выводит формулу Эйлера для выпуклых многоугольников: число разложений

$$P_{n+1} = \frac{4n-6}{n} P_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5)(2n-3)}{n!} \cdot 2^{n-1}.$$

Боев Г. П., О мероопределении пространства времени, У. Р., т. 13, вып. 1.

Боев Г. П., О кривизне эйнштейнова мира, У. Р., т. 13, в. 1.

Бончковский Р. Н., Покрытие плоскости правильными многоугольниками, М. П., 3. Автор рассматривает случай покрытия разноименными правильными многоугольниками и доказывает, что число всех возможных покрытий равно 11.

Бончковский Р. Н., Заметка о числе различных форм многоугольников, М. Ф., 34, 4. Автор приводит формулу для общего числа различных форм  $p$ -угольника:  $\Phi_p = \frac{2^p - 2}{p} \cdot \frac{p-1}{2}$ , где  $p$  — простое число.

Бончковский Р. Н., Покрытие плоскости конгруэнтными четырехугольниками, М. Ф., 2.

Выгодский М. Я., Об одном применении диагонального процесса к комбинаторным задачам, М. С., 42:1. Приводится решение задачи, частный случай которой рассматривал А. Cayley: найти число всех выпуклых  $k$ -угольников, вершинами которых служат  $k$  из  $n$  вершин выпуклого  $n$ -угольника, причем две соседние вершины  $k$ -угольника должны быть разделены по меньшей мере  $s$  вершинами  $n$ -угольника. Искомое число равно  $A_n^k(s)$ ; при  $s=1$  случай Cayley

$$A_n^k(1) = B_n^k = \frac{n}{k} C_{n-k-1}^{k-1}; \quad A_n^k(s) = \frac{n}{k} C_n^{k-1} C_{ks-1}^{k-1};$$

$$A_n^k(0) = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} = C_n^k.$$

Задача не имеет решений при  $n < k(1+s)$ .

При  $n = k(1+s)$  число различных  $k$ -угольников равно  $1+s$ .

Гинзбург Л. М., Симметрия на шаре.

Гиршвальд Л. Я., Проективная геометрия, Харьков.

Содержание: Основные понятия проективной геометрии. Геометрия прямой линии и пучка прямых. Проективное соответствие между плоскостями. Проективные свойства кривых 2-го порядка. Книга предназначена для студентов фотогодезической специальности.

Гохман Э., Введение в тензорное исчисление, Киев—Харьков.

Демме А., О многолепестковых розах, как геометрическом месте точек, М. Ф., 1.

Содержание: О кривых — четырехлепестковой розе, теореме Гранди. Квадратура их. Исторические сведения.

Добровольский В. В., Пространственные диаграммы, М. П., 2. О вычислениях значений функции одного и двух переменных по заданным значениям аргумента. Формула Машека. Примеры.

Зетель С. И., О шестиугольниках, вписанных в треугольник, М. Ф., 34, 3. Развитие заметки автора „Теорема Жергона и следствия из нее“. Антибиссектрисы треугольника. Точки Енжабека.

Зетель С. И., О вычислении сторон и апофем правильных 12-угольника и 24-угольника. М. Ф., 2. Приводится вывод формул

$$a_{12} = \frac{R}{2} (\sqrt{6} - \sqrt{2}), \quad a_{24} = \frac{R}{2} \sqrt{8 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}.$$

Извольский Н., Геометрическое учение о площадях, М. Ф., 2. Изложение теории площадей Веронезе. О принципе Де-Польта.

Кеплер И., Новая стереометрия винных бочек, преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму, и исключительно удобное употребление для них кубической линейки с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии. Перевод и предисловие Г. Н. Свешникова. Вступительная статья М. Я. Выгодского.

Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей. Лекции, читанные в Геттингенском университете, т. 2. Геометрия. В обработке Е. Геллингера, с добавлением Ф. Зейфарта. Перевод с 3-го немецкого издания под редакцией Д. А. Крыжановского, 1934.

Кованько А. С., Аналитическое исследование некоторых типов проективных преобразований (Перспективные преобразования), М. П., 2. Общие положения и выводы. Метод перспективных построений.

Колмогоров Н. А., Вывод некоторых формул тригонометрии, М. П., 2. Некоторые формулы тригонометрии автор выводит при помощи косоугольного треугольника с тремя высотами.

Колмогоров Н. А., Обобщение теоремы Хузеля, М. П., 2. Автор обобщает теорему House'a: центр медиан описанного многоугольника, центр круга вписанного и центр круга, вписанного в дополнительный многоугольник, лежит на одной прямой.

Литцман В., Теорема Пифагора. Содержание: Из истории теоремы П. Доказательство с помощью разложения. Теорема П. в системе Эвклида. Теорема и учение о подобии. Функциональная зависимость. Пифагоровы числа. Большая теорема Ферма.

Перельман Я., Занимательная геометрия. Издание дополненное и иллюстрированное.

Сапунов П. И., Преобразование и объединение групп общих решений тригонометрических уравнений, М. П., 3. Автором указано преобразование формулы для произвольного члена бесконечной арифметической прогрессии.

Черняев М. П., Об одном свойстве конического сечения, вписанного в треугольник, М. П., 2. Прямое аналитическое доказательство теоремы R. Googtaghtig'a.

Четверухин Н. Ф., Геометрические построения и приближения. Для пединститутов и учителей средней школы. Содержание: Разбор задач Кастильона, Апполония, Паппа и делийской проблемы об удвоении куба.

Швердт Г., Номография на основе геометрического отображения. Государственное издательство Украины. Перевод с немецкого.

Щербakov А. Д., Решение треугольника способом выпрямления сторон, М. П., 2. Даны 3 примера.

#### *Задачи по геометрии.*

М. П., 2, № 31, 32, 33, 34, 46, 49, 50.

М. П., 3, № 54, 59, 61, 62, 63, 64, 70, 72.

М. Ф., 1, № 5, 6, 7, 8, 9.

М. Ф., 2, № 7, 8, 9, 10, 11, 12.

М. Ф., 3, № 1, 5, 10, 11, 12, 13, 14.

Н. Ж., 2, № 1, 4; 3, № 3; 4, № 5.

#### *Задачи по тригонометрии.*

М. П., 2, № 35, 40; 3, № 57, 67.

М. Ф., 1, № 10, 11, 12.

М. Ф., 2, № 13, 14, 15, 16, 17.

М. Ф., 3, № 15, 16, 17, 18, 19, 20

## СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
А. Ф. Арефьев. Деление многочлена на многочлен . . . . .	3
Е. Вегеман. О заполнении сферы правильными фигурами . . . . .	8
Ганьшин. Решение одной системы линейных уравнений . . . . .	15
Ф. В. Доброхотов. Очерк аналитической теории тригонометрических функций . . . . .	20
В. А. Скрылев. Об одном экстремальном свойстве точек пересечения биссектрис и углов треугольника . . . . .	31
М. П. Черняев. Об одном свойстве треугольника . . . . .	35
Д. М. Синцов. Связь астроида и четырехлепесткового венчика . . . . .	37
В. К. Матышук. Об одном приближенном способе трисекции угла . . . . .	38
Г. А. Владимирский. Построение стереоскопических проекций геометрических фигур . . . . .	42
О. Гельдер. Аксиомы, эмпирические законы и математические конструкции . . . . .	56
<b>Задачи</b>	
Задачи . . . . .	64
Решения задач . . . . .	65
<b>Библиография</b>	
Указатель книг и статей по элементарной и началам высшей математики за период с 1/I по 1/VII 1935 г. . . . .	72

---

## УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В 1936 г. выйдут в свет 3 выпуска сборника „Успехи математических наук“, издаваемого Всесоюзной математической ассоциацией (председатель акад. О. Ю. Шмидт).

„Успехи“ содержат обзоры, освещающие современное состояние и проблематику различных областей математических наук, переводы наиболее ценных статей из зарубежной периодики, информацию о работе научно-исследовательских коллективов в СССР и за границей, библиографию.

„Успехи“ рассчитаны на широкие круги математиков (научных работников, аспирантов, педагогов, студентов старших курсов физико-математических факультетов) и научных работников смежных специальностей.

К участию в сборнике привлечены крупнейшие советские и иностранные ученые. Состав редакции: А. Ф. Бермант, Ф. Р. Гантмахер (ответственный секретарь), С. Э. Кон-Фоссен, Н. Е. Кочин, А. Н. Колмогоров, В. Д. Купрадзе, Л. А. Люстерник (ответственный редактор), И. Г. Петровский, А. И. Плесснер, Б. И. Сегал, В. И. Смирнов, В. А. Тартаковский.

1-й выпуск, содержащий около 22 печатных листов, стоимостью 8 руб., выйдет в июле месяце 1936 г.

В 1-м выпуске будет помещено:

А. Я. Хинчин. Метрические задачи теории иррациональных чисел.

С. Э. Кон-Фоссен. Об изгибании поверхностей в целом.

Цикл статей по функциональному анализу (Л. А. Люстерник, В. В. Немыцкий; переводные статьи Рисса и Радона).

С. Л. Соболев и С. Г. Михлин. Математическая сейсмология в СССР.

П. С. Александров. Первая международная топологическая конференция в Москве.

С. Л. Соболев. Математические диссертации в Академии наук.

А. Вейль (Страсбург). Математические науки во Франции.

С. Лефшец (Принстон). Математическая деятельность в Принстоне.

Математическая проблематика. Математическая хроника. Библиография.

„Успехи“ высылаются по почте наложенным платежом по предварительным заказам, направленным по адресу: Москва, Третьяковский проезд, 1, „Техкнига-ОНТИ“.

---

*ВЫШЛИ В СВЕТ*

**Виноградов И. М.**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ**

**Гурса Э.**

**КУРС АНАЛИЗА Т. II.**

**Глаголев Н. А. и Андреев П. П.**

**ОСНОВЫ НОМОГРАФИИ**

**Барлоу**

**ТАБЛИЦЫ КВАДРАТОВ, КУБОВ И КОРНЕЙ**

**Градштейн И. С.**

**ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ТЕОРЕМА**

*НАХОДЯТСЯ В ПРОИЗВОДСТВЕ*

**Александров П. С. и Ефримович В. А.**

**ОЧЕРКИ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТОПОЛОГИИ**

**Гильберт Д. и Кон-Фоссен С.**

**НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

**Люстерник Л. А.**

**ВЫПУКЛЫЕ ТЕЛА**

**Гаусдорф**

**ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ**

**Цубербиллер О. Н.**

**ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.**

---



*В БЛИЖАЙШЕЕ ВРЕМЯ ПОСТУПАТ В ПРОДАЖУ*

**„МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ“**

Вып. 8

**Содержание**

Региомонтан. (К 500-летию со дня рождения) О законе синусов для сферического треугольника (отрывок из книги „De triangulis omnimodis“). С. И. Зетель. О свойствах правильных многоугольников. И. В. Арнольд.

Об одном свойстве числа  $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . С. Е. Аршон. Полное решение задачи о слонах. Н. А. Извольский. О параболах, вписанных в треугольник. С. Е. Вихман. Релятивное интегрирование. М. С. Бритман. О сходимости гармонического ряда. Г. А. Ключарев. Построение параболы 2-го порядка и парабола Нейля. Д. А. Крыжановский. К теории решения уравнений и неравенств. Библиография (Радемахер. Т. и О. Теплиц. Числа и фигуры). Задачи. Решения задач.

**„МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ“**

Вып. 10

**Содержание**

И. И. Трифонов. Об одном свойстве тетраэдра. Н. А. Извольский. О треугольнике минимального периметра, вписанном в остроугольный треугольник. П. П. Андреев. Циркулярная номограмма квадратного уравнения на декартовой сетке. А. Я. Граусман. Квадрат Эйлера. В. А. Скрылев. О приводимости симметрической функции вида  $\sum_{i=1}^n x_i^n + mx_1x_2\dots x_n$ . В. А. Скрылев.

Об одном признаке существования комплексных корней целой рациональной функции. И. С. Павлов. Решение одного функционального уравнения. А. И. Узков. Два примера решения задач с помощью функциональных уравнений. Э. К. Хилькевич. Об одном свойстве перспективных треугольников. Б. Каминский. Кривизна нормальных сечений поверхности. С. С. Бюшгенс. О качении кривой. Д. А. Крыжановский. Как не следует писать и издавать массовую математическую литературу. Задачи. Решения задач. Письма читателей. Библиография (указатель книг и статей по математике, вышедших с 1/VII—1935 г. на 1/I—1936 г.).

**Заказы направлять по адресу: Москва, Третьяковский проезд 1, „Технига—почтой“ или: Москва, ул. Кирова 6, Книжный магазин ОНТИ № 1, „Книга—почтой“. Сборники высылаются наложенным платежом.**

---